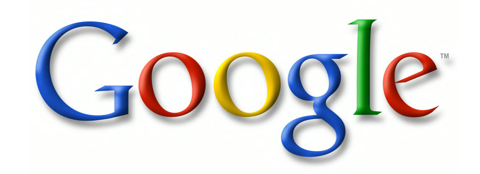
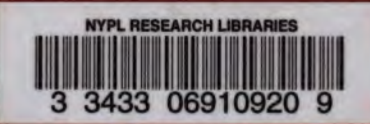
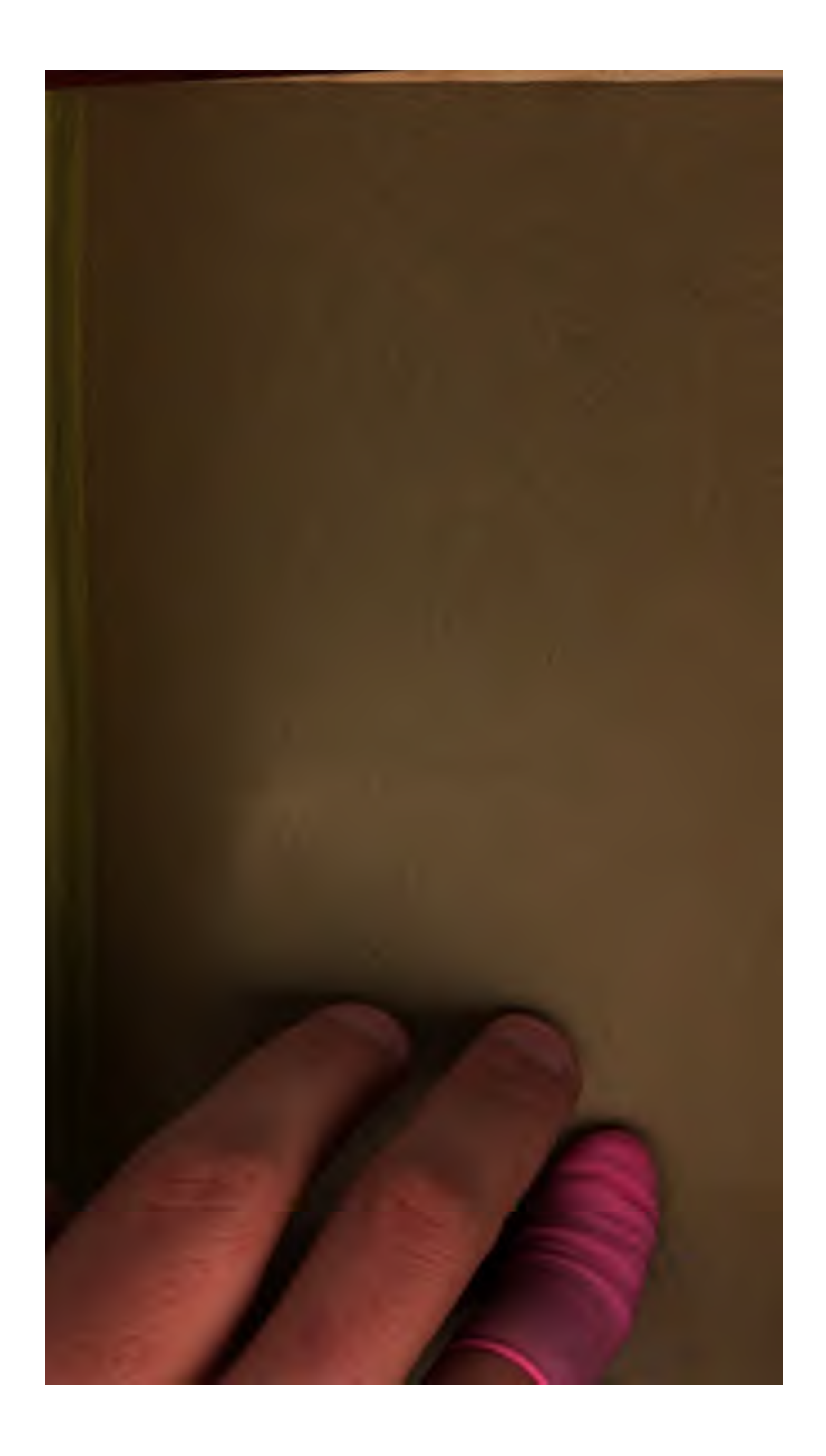



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910920 9





INTRODUCTION
A LA PHYSIQUE,
ET PARTICULIÈREMENT
A LA MÉCANIQUE.

Se trouve à Paris,

Chez Le Normant, rue des Prêtres Saint-Germain l'Auxerrois N.° 17.

INTRODUCTION

A LA PHYSIQUE,

ET PARTICULIÈREMENT

A LA MÉCANIQUE;

PAR C. J. LE PRIOL,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES AU LYCÉE DE STRASBOURG.



STRASBOURG,

De l'imprimerie de Levrault, imprimeur du Lycée.

1806.

PRÉFACE.

A l'époque célèbre où les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* furent publiés, on vit les savans s'empresser de les approfondir, de les commenter et d'en répandre la doctrine; et ce livre immortel devint bientôt la base d'une foule de bons ouvrages qui parurent alors en Angleterre et, peu de temps après, en Hollande. La France savante semble de nos jours rivaliser de zèle et de lumières avec le siècle de *Newton*, et déjà le *Traité de mécanique céleste* a donné naissance à plusieurs excellens ouvrages sur différentes parties de la physique. Mais en lisant les écrits des disciples de Newton, surtout ceux de *Maclaurin* et de *'sGravesande*, on y remarque une application constante à éclaircir et à fixer les notions les plus abstraites que le maître avait établies; et l'on regrette que, jusqu'à présent, les disciples de M. *de la Place* ne se soient pas autant occupés des vues également profondes de ce grand géomètre; qu'ils n'aient pas développé les traits de

lumière qu'il a répandus sur la métaphysique de la physique en général, et de la mécanique en particulier.

Le D.r *Kant*, dans ses différens ouvrages, et surtout dans ses *metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, nous paraît aussi avoir jeté beaucoup de jour sur cette matière, en donnant plusieurs idées justes qu'on n'avait pas assez bien saisies avant lui : mais ses ouvrages ne sont guère connus encore que de ses compatriotes; et il est permis de conjecturer que jamais ils ne se répandront beaucoup chez les autres nations.

Sans doute, malgré les prétentions de l'école kantienne, nous sommes bien loin encore d'avoir une philosophie complète de la nature; mais dans les ouvrages des grands hommes que nous venons de nommer, on en trouve du moins des germes qui nous paraissent très-précieux : car il nous semble qu'en recueillant les idées justes qu'ils y ont répandues, en les développant et en les présentant dans un ordre naturel, on serait sur la voie qui conduira

peut-être, un jour, à réduire les principes de nos connaissances en physique au plus petit nombre possible, et à assigner le point où elles doivent sortir du domaine direct de l'expérience, pour ne plus s'appuyer que sur des raisonnemens évidens, c'est-à-dire, pour être susceptibles de devenir de véritables sciences.

Un travail de ce genre aurait encore l'avantage de suppléer à la brièveté des premières notions qu'on trouve dans la plupart des traités élémentaires de physique et de mécanique, et ne serait pas inutile aux jeunes élèves qui commencent à se livrer à l'étude approfondie de ces sciences.

C'est par ce double motif que nous nous sommes décidés à détacher ces prolégomènes d'un travail plus étendu, pour les publier. En prenant nos grands maîtres, et particulièrement MM. *de la Place* et *Kant*, pour guides, nous tâchons d'y donner une idée juste de l'objet de la physique, des sources où elle puise ses principes, des règles qu'elle doit suivre et des secours qu'elle doit emprunter,

pour atteindre son but. Nous cherchons ensuite à fixer la signification d'un grand nombre de termes, en développant les idées qu'on y attache et qui servent de base à toute la physique.

Dans les prolégomènes de la mécanique, nous nous sommes proposé de donner une notion exacte du mouvement, de plusieurs de ses espèces, de leurs mesures et de leur composition, de l'inertie, de la force, des différentes espèces de forces et de leurs mesures, de l'antagonisme, et de la pesanteur terrestre, qui, considérée sous ses différens points de vue, nous paraît très-propre à éclaircir les notions abstraites exposées dans les chapitres précédens. Nous passons ensuite à la composition des forces, puis à la détermination et à la composition de leurs momens : dans ces deux chapitres, nous nous sommes particulièrement servis du *Traité élémentaire de statique*, par M. *Monge*, petit ouvrage dont l'ordre et la clarté ne sont point indignes du génie créateur de la géométrie descriptive. Enfin nous terminons ces prolégomènes en expo-

sant le principe des vitesses virtuelles et sa combinaison avec celui de d'Alembert; et ici notre guide a été le grand géomètre qui, par l'heureux emploi de ces deux principes dans sa *Mécanique analytique*, a changé en quelque sorte la face de la mécanique, et a fait de toutes ses parties comme une seule et même science.

Nous aurions pu nous dispenser d'entrer dans aucun détail sur la composition et la décomposition des forces, dont les développemens sont étrangers à la philosophie de la mécanique, et ont d'ailleurs été déjà bien exposés dans plusieurs ouvrages. Mais cette théorie, étant également applicable à toutes les parties de la mécanique, nous a paru être à sa place dans des préliminaires. De plus, nous avons pensé qu'on nous pardonnerait les longueurs de détail en faveur des deux beaux théorèmes, moins généralement connus, qu'on doit à MM. *de la Grange, Euler* et *de la Place*, sur la composition des rotations et des momens : ils offrent chacun l'avantage de compléter les démonstrations qu'on donne,

dans les élémens de mécanique, des conditions générales de l'équilibre de rotation des corps solides. Nous avons cru voir aussi, dans le rapprochement de ces deux théorèmes, la proportionnalité des momens aux rotations élémentaires, résultat assez remarquable, et qui semble devoir répandre un nouveau jour sur la nature des momens, en les plaçant, relativement aux vitesses angulaires, sur la même ligne que les forces occupent par rapport aux vitesses progressives.

C'est d'après ces considérations que nous nous sommes permis d'insérer dans ces prolégomènes les quatrième et cinquième chapitres. Quant au sixième, nous ne l'avons ajouté que pour faire connaître aux jeunes élèves la possibilité de réduire la solution de tous les problèmes de mécanique à celle de problèmes de pure analyse. Puisse cet essai leur inspirer le désir d'étudier le développement de cette vérité dans les ouvrages des grands géomètres qui font aujourd'hui l'orgueil de la France et l'admiration de l'Europe!

TABLE DES MATIÈRES.

PROLÉGOMÈNES DE PHYSIQUE.

CHAPITRE I.er *Considérations générales sur la physique.*

CHAPITRE II. *Notions de quelques propriétés plus ou moins générales des corps.*

PROLÉGOMÈNES DE MÉCANIQUE.

CHAPITRE I.er *Généralités sur le mouvement.*

CHAPITRE II. *Généralités sur les forces.*

PROLÉGOMÈNES DE PHYSIQUE.

CHAPITRE I.er

Considérations générales sur la physique.

§. I.er *Objet de la physique.*

1. Le mot français *nature* est dérivé du latin *nasci* (naître), comme le mot grec *φύσις* vient de *φύειν*, qui signifie la même chose. Ainsi la *nature*, d'après l'étimologie du mot, et, suivant le langage des métaphysiciens, prise *matériellement*, comprend tout ce qui est né; elle embrasse dans sa signification l'universalité des êtres dont l'existence a commencé.

La doctrine dont l'objet serait la nature ainsi prise généralement, pourrait donc s'appeler *Physiologie* en général.

2. Nous pouvons considérer la nature en elle-même, ou par rapport aux facultés que nous avons de la connaître. Or, quel que soit celui de ces deux points de vue que l'on choisisse pour l'approfondir, on est forcé, en dernière analyse, d'y reconnaître deux sortes de

substances. Les unes sont douées de la faculté de penser; les autres en sont entièrement privées : celles-là échappent à tous nos sens extérieurs, à la vue, au toucher, etc., et sont appelées *spirituelles;* celles-ci tombent sous ces mêmes sens, et nous les nommons *matérielles, corporelles.*

La physiologie se divise donc en deux branches. L'une ne s'occupe que des esprits; c'est la *Psycologie :* l'autre ne traite que de la matière, des corps; c'est la *Physique en général.*

Ainsi la Physique en général a pour *objet matériel* toutes les substances corporelles dont l'assemblage compose l'univers.

3. La somme de la matière qui compose cet univers, n'augmente ni ne diminue, mais reste constamment la même. Les métaphysiciens regardent ce principe comme démontré, et les modernes lui donnent le nom de *loi de subsistance.* C'est la base de la physique et de toutes celles de nos connaissances qui en dépendent.

4. Mais, quoique rien dans l'univers ne tombe dans le néant, cependant tous les corps qui le composent, peuvent chacun avoir successivement différentes manières d'exister; tous peuvent changer en eux-mêmes

et par rapport aux autres corps. Ces changemens ne peuvent arriver sans causes. Or, de toutes ces causes, il n'y a que celles qui ont leur principe immédiat dans les corps de la nature, qui soient du ressort de la physique. C'est pour cela que les changemens qui arrivent aux corps de la nature, sont appelés des *effets naturels*, des *opérations de la nature.*

5. Ces effets, en tant qu'ils nous apparaissent, c'est-à-dire, en tant que nous les voyons, que nous les touchons, etc., portent le nom de *phénomènes* (externes), *d'apparitions.* Ainsi *tout ce que nos sens, frappés par des objets extérieurs, représentent à notre esprit,* s'appelle PHÉNOMÈNE dans le langage de la physique : il est composé d'une substance matérielle, et des accidens, ou des modes, qui déterminent cette substance.

La métaphysique approfondit la possibilité de la matière, discute la réalité de son existence, et en recherche l'auteur. Elle examine si l'esprit humain peut connaître la matière telle qu'elle est en elle-même, ou seulement en tant qu'il se la représente et qu'elle est pur phénomène; si ces phénomènes ne sont que des images présentes à notre esprit et n'existent que dans lui, ou s'ils conviennent réellement aux objets extérieurs auxquels

nous les rapportons, etc. La physique, au contraire, suppose l'existence des phénomènes, quel qu'en soit le sujet, et ne recherche que les affections de leur matière et les causes de ces affections.

6. Cette double recherche a deux parties, l'une purement *narrative* et *historique*, l'autre *discursive* et *rationelle*, qu'on appelle aussi *philosophique*. La partie historique ne contient que des faits présentés dans un ordre systématique. D'un côté, elle renferme la description des corps de la nature, classés d'après des caractères propres à les faire reconnaître; et, sous ce rapport, on pourrait la nommer *description de la nature* : d'un autre côté, elle doit offrir la description systématique des phénomènes que l'on a observés en différens temps et en différens lieux; et sous cet autre point de vue, elle est véritablement *histoire naturelle*. C'est cette dernière branche qui fournit tous les matériaux qui entrent dans la construction de la partie philosophique.

7. La partie philosophique ne se propose *que de trouver les causes des phénomènes, de faire voir comment elles leur donnent naissance, et de former ainsi un ensemble de connaissances rangées chacune à sa place et liées nécessairement entre elles, comme des prin-*

cipes à leurs conséquences ou des conséquences à leurs principes. C'est *la* Physique *proprement dite.*

Si jamais elle atteint ce but si désirable, et qu'un jour elle nous offre réellement *un système de connaissances ordonnées d'après les principes dont elles découlent nécessairement*, elle méritera bien le beau nom de *science :* sans cette unité de système, elle n'est qu'un assemblage de connaissances; sans cette nécessité des conclusions, elle n'est qu'une doctrine d'expérience.

8. Parce que la Physique a pour but de découvrir et de faire voir comment les phénomènes de la nature naissent les uns des autres, c'est-à-dire, de les *èxpliquer*, on lui donne souvent le nom d'*explication*, d'*interprétation de la nature.* Si elle se repose dans cette explication, elle est purement *théorique, spéculative :* si, au contraire, elle se propose d'agir, elle devient *pratique*, *opérative*, et contient sous elle tous les arts manuels. Ce qui est un dogme dans la théorie, devient une règle dans la pratique et dans les arts.

Que les arts soient du ressort de la physique, c'est ce que l'on ne saurait révoquer en doute, si l'on fait attention que, quant à

la nature formelle (13) d'un phénomène, il est indifférent qu'il ait été produit par l'homme, ou sans la participation de l'homme.

9. Cependant, sous ce point de vue, on distingue ordinairement deux sortes de phénomènes. Ceux qui arrivent spontanément, ou sans aucune participation préméditée de notre part, sont appelés simplement *phénomènes*. Au contraire, ceux que nous produisons ou que nous provoquons nous-mêmes, dans l'intention de connaître ce qui arrive dans des circonstances données, sont des *expériences*, des *essais*.

Il est rare que nous puissions observer à loisir certains phénomènes spontanés, et en saisir toutes les circonstances. Les uns sont trop subtils, ou très-fugitifs; et si nous ne prenons pas la nature sur le fait, elle ne nous les ramène, quelquefois, qu'à des époques éloignées, à des momens où nous ne les attendons pas. D'autres demandent des siècles pour se développer complétement, ou se passent dans des lieux dérobés à nos regards, et échappent, au moins en partie, à nos recherches. Pour remédier, autant qu'il est possible, à ces inconvéniens, le physicien a recours à l'art; qui est en quelque sorte une seconde nature, et qui fait même en

peu de temps ce qui coûte une longue suite d'années à la nature : il répète et varie les expériences; et à force de tourmenter la nature, il en découvre les différentes faces, et lui arrache des secrets qui sans cet artifice seraient à jamais restés au fond du puits de *Démocrite.*

§. II. *Sources des principes de la physique, et notions des lois de la nature.*

10. Un phénomène quelconque, spontané ou artificiel, n'est pas plus tôt reçu par nos sens, qu'il porte dans notre ame l'impression de divers objets. Mais il n'en montre pas la liaison mutuelle : ce n'est encore qu'une pure représentation. L'esprit s'empare de ces matériaux, les compare entre eux, et les réduit à l'unité, en les rangeant sous ses propres notions; il juge que, dans les mêmes circonstances, l'objet du phénomène fera toujours sur lui la même impression : il connaît alors cet objet. Ce sont ces sortes de connaissances qu'on nomme *connaissances d'expérience.* On les appelle aussi *connaissances d'observation,* lorsqu'elles n'ont été données que par des phénomènes spontanés.

11. L'expérience ne peut nous faire con-

naître que des objets existans. C'est pour cela que les connaissances d'expérience sont dites être *a posteriori.* Elles ne sont pas d'une vérité rigoureusement nécessaire; car l'expérience nous dit seulement qu'une chose est de telle ou de telle manière, sans nous apprendre qu'elle ne peut pas être autrement: par la même raison, elles ne sont pas nécessairement générales.

Les connaissances *a priori* sont celles dont nous voyons clairement que l'objet ne peut pas être autrement : telles sont les propositions de mathématiques et les règles du syllogisme, qui n'empruntent nullement leur vérité de l'expérience, comme on est forcé d'en convenir, quelque opinion qu'on embrasse d'ailleurs sur l'origine des idées.

12. Toute philosophie part de principes connus *a priori*, ou *a posteriori.* Dans le premier cas, les *Kantiens* ou *Criticiens* l'appellent *philosophie pure :* dans le deuxième, ils lui donnent le nom de *philosophie empirique;* celle-ci pourrait s'appeler *philosophie d'expérience.*

De là on conçoit que la physique, à raison des sources d'où elle tire ses principes et le développement de ses conséquences, pourrait se diviser en deux parties : l'une serait

la *physique pure*, et l'autre, la *physique d'expérience.*

Mais cette division suppose la possibilité d'une métaphysique rigoureuse de la physique ; et cette possibilité ne paraît admissible que dans le cas où, suivant les *Kantiens*, les phénomènes ne seraient que de pures représentations, dont la métaphysique devrait par conséquent, comme les règles du syllogisme, se tirer uniquement de l'essence même de notre faculté de penser : car quand on considère les phénomènes comme appartenans aux corps pris en eux-mêmes, et placés ainsi hors de nous, dès-lors l'expérience devient nécessaire pour nous faire connaître *les règles générales qui président à leur naissance*, et il faut renoncer à toute métaphysique rigoureuse de la physique. (14.)

13. Ces règles générales, c'est-à-dire, *les principes de la nécessité de tout ce qui détermine l'existence des phénomènes*, sont ce que l'on nomme les LOIS DE LA NATURE.

L'existence des phénomènes, en tant que déterminée par ces lois, est ce qu'on appelle leur *nature formelle*.

Remonter par degrés, des causes prochaines des différens phénomènes à des

causes de plus en plus éloignées, et présenter la série non interrompue des lois qui concourent à leur donner naissance, ce serait expliquer parfaitement et complétement la nature. Mais « l'être suprême, qui a établi « ces lois et les maintient, voit seul la chaîne « entière dont elles forment les premiers « anneaux. » (M. *Haüy.*)

14. Ces premières lois mêmes, l'esprit humain ne saurait, ce semble, jamais les découvrir, ou du moins être assuré de les connaître, tant qu'il regardera les phénomènes comme des objets qui existent réellement hors de lui-même. En effet, les idées que nous nous formerions de ces objets, seraient puisées ou dans la nature matérielle même, ou hors de cette nature. Dans le premier cas, nous ne connaîtrions en dernier résultat ces lois que par l'expérience. Or l'expérience ne peut rien nous apprendre sur la nécessité et la généralité rigoureuses des lois de la nature (11). En supposant la possibilité du second cas, nous pourrions à la vérité, en analysant nos idées, découvrir ce qu'elles renferment : mais il semble que jamais nous ne parviendrons, par ce moyen, à voir intuitivement ce qui convient réellement aux objets mêmes placés hors de

nous, et ce qui détermine leur existence; car ces objets sont tout ce qu'ils sont, indépendamment de nos idées. Il faut donc, pour les connaître et connaître les lois qui en déterminent l'existence, que l'esprit humain se règle sur l'existence de ces objets mêmes, et y puise ses premières idées; ce qui est contraire à la seconde supposition, et retombe dans la première.

Il semble donc que l'homme est dans l'impossibilité de s'élever, ici-bas, à la connaissance intuitive des causes premières ou des lois les plus générales qui déterminent ces effets naturels, tels qu'ils se passent dans la nature même, et de jamais atteindre ce dernier terme de la physique; mais il peut en approcher.

15. Les lois générales sont, pour ainsi dire, empreintes dans tous les cas particuliers; et s'il ne nous est pas donné de les en faire ressortir, il est du moins possible d'en tirer des principes qui les remplacent en quelque sorte pour nous. Il faut choisir ou faire naître les phénomènes les plus propres à cet objet, les multiplier pour en varier les circonstances, et observer ce qu'ils ont de commun entre eux. Ce que nous remarquerons d'*uniforme et de constant* dans

tous les phénomènes ou dans certains phénomènes, dérive sans doute de la nature même de la matière, ou de certaines matières; et si nous ne sommes pas autorisés à le regarder comme une loi rigoureuse de la nature, tant que nous n'en voyons pas intuitivement la nécessité, c'est du moins *une donnée d'expérience* qui comprend sous elle les différens phénomènes comme des cas particuliers, et une sorte de *règle à laquelle ils se conforment dans les mêmes circonstances.* Ces règles peuvent s'appeler *lois d'expérience.*

C'est uniquement à rechercher ces lois d'expérience, à les réduire au plus petit nombre possible, et à faire voir comment des phénomènes qui paraissent si variés et si compliqués, ressortent de leurs différentes combinaisons, que se borne la véritable physique. [1]

---

1. Ainsi la physique, en soulevant une des extrémités du voile qui couvre la nature, avoue au moins tacitement que l'autre tient à un nœud qu'elle ne saurait résoudre. Mais, quoiqu'elle ne puisse franchir cette limite, elle réunit cependant des avantages inappréciables : car, pour me servir de la pensée et des expressions mêmes du célèbre Haüy, d'une part elle ramène à quelques principes d'expérience, comme à des points fixes, tous les effets particuliers de la nature, et les met en rapport les uns avec les autres; en sorte que tout ce qui est en-deçà de ces principes, qu'elle ne cherche pas à expliquer,

§. III. *Règles générales de physique.*

16. La manière dont nous venons de dire qu'il faut procéder à la recherche des lois de la nature, s'appelle *analyse, méthode analytique, ascendante, d'induction*, etc. Elle part de faits particuliers, s'élève ensuite à des rapports de plus en plus étendus, et parvient enfin aux lois qu'elle regarde comme

---

se trouve ainsi éclairé pour nous, et expliqué d'une manière vraie en ce sens, que les conséquences auxquelles nous arrivons représentent les phénomènes tels qu'ils sont. D'une autre part, « elle nous met à portée de déterminer d'avance, « d'une manière certaine, l'effet qui doit avoir lieu dans telle « circonstance, et, par une suite nécessaire, de produire à « volonté tel effet, en amenant les circonstances dont il dé- « pend, lorsqu'il s'agit d'un objet qui tient à la physique ex- « périmentale. Ainsi, non-seulement elle nous dévoile en partie « les ressorts cachés que la nature fait jouer dans les opéra- « tions qui se passent sous nos yeux; mais elle étend nos vues « jusque sur les résultats des opérations futures, et les soumet « même en quelque sorte à notre pouvoir. »

Par ses bornes mêmes, que l'esprit humain est forcé de respecter, la physique nous procure un avantage d'un ordre infiniment plus élevé : elle nous rappelle sans cesse que, malgré le penchant irrésistible qui nous porte vers la vision intuitive de la vérité des objets, nous ne saurions y atteindre ici-bas, et que par conséquent, ou bien nous sommes continuellement le jouet d'une illusion invincible, ou bien il y aura pour nous, un jour, un autre ordre de choses où nous verrons les objets tels qu'ils sont en eux-mêmes.

les plus générales. Cette méthode, que *Bacon* a établie avec toute la force de la raison et de l'éloquence, et que *Newton* a plus fortement encore recommandée par ses sublimes et nombreuses découvertes, est le guide le plus sûr que l'on puisse suivre dans la recherche de la vérité; et depuis long-temps elle est généralement adoptée par tous les hommes appelés à reculer les bornes de nos connaissances.

Mais il est bon, et souvent même nécessaire, de vérifier les résultats de l'analyse par la *synthèse*, qu'on nomme aussi *méthode synthétique*, *descendante*, *de doctrine*, etc. Celle-ci descend, par degrés, des principes les plus généraux à des lois de plus en plus particulières, pour arriver enfin, autant que possible, à l'explication complète des phénomènes. On se sert avec avantage de cette méthode pour communiquer des connaissances déjà acquises, et pour déduire de principes connus, des expériences nouvelles: elle donne naissance aux arts. Mais en plaçant l'homme comme à la source de toutes les connaissances, elle l'expose à tous les écarts de son imagination; et l'exemple des anciens philosophes et de Descartes fait assez voir qu'elle est sujette à n'engendrer que

de vains systèmes, et ne peut promettre des découvertes solides et durables dans la connaissance de la nature. Elle doit donc se borner ici à vérifier les lois déjà connues, soit en les soumettant à des preuves ou à des expériences directes, lorsque la chose est possible, soit en examinant si elles satisfont à tous les phénomènes connus et du même genre que ceux dont l'analyse les a déduites.

Newton, dans ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, et dans son *Optique*, a fait les plus heureuses applications de cette double méthode, qui, comme on vient de le voir, consiste à s'élever, par une suite d'inductions, des principaux phénomènes aux causes, et à redescendre ensuite de ces causes à tous les détails des phénomènes. Dans le troisième livre des *Principes* et à la fin de son *Optique*, il donne des règles très-propres à nous guider dans l'étude de la physique : elles ne seront pas déplacées ici.

17. RÈGLE I.re *Il ne faut admettre de causes que celles qui sont véritables et nécessaires pour expliquer les phénomènes.*

1.° Ces causes doivent être *véritables*, c'est-à-dire, réellement existantes dans la nature ; 2.° *nécessaires*, ou telles que les phénomènes qu'on doit expliquer, en découlent nécessai-

rement; 3.° on ne doit admettre *que celles* etc. : car prendre plus de causes qu'il n'en faut pour expliquer les phénomènes, c'est supposer tacitement qu'il peut y avoir des causes sans effets; ce qui est contradictoire.

18. Règle II. *Les effets du même genre doivent toujours, autant qu'il est possible, être attribués à la même cause.* « Ainsi la res-
« piration de l'homme et celle des bêtes, la
« chute d'une pierre en Europe et en Amé-
« rique, la lumière du feu ici-bas et celle
« du soleil, la réflexion de la lumière sur la
« terre et dans les planètes, doivent être at-
« tribuées respectivement aux mêmes causes. »

Dans l'application de cette règle il faut prendre garde de prononcer légèrement sur l'identité ou sur la diversité de l'espèce des phénomènes. La simple inspection du mouvement de l'aiguille d'une pendule ne suffit pas pour déterminer par quelle espèce d'agent elle est mise en mouvement.

19. Règle III. *Les qualités des corps qui ne sont susceptibles ni d'augmentation ni de diminution, et qui appartiennent à tous les corps sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées comme appartenantes à tous les corps en général.* C'est là-dessus qu'est fondé le développement des propriétés géné-

rales des corps, que nous donnerons dans le second chapitre.

Cette règle et la précédente comprennent ce qu'on nomme l'*analogie de la nature*, laquelle sert de fondement à toute la philosophie. Le *criticien* même le plus sévère, en cherchant à définir les bornes de la raison humaine, ne détermine tout au plus que celles de la sienne : ce n'est que par l'analogie qu'il peut sortir de sa personne, et appliquer aux autres ce qu'il n'a senti que dans lui-même.

20. RÈGLE IV. *Une cause qui est indiquée par les phénomènes, et qui n'est contraire à aucune vérité connue, doit être regardée comme vraie, pourvu qu'elle soit vérifiée par des preuves ou des expériences directes, ou qu'elle satisfasse à tous les phénomènes du même genre;* car elle nous représentera toujours les phénomènes tels qu'ils sont: elle en est donc la véritable cause, ou peut du moins la remplacer pour nous.

Quand il s'agit d'admettre ou de rejeter une cause qu'il est possible de soumettre à des expériences, on doit faire un choix judicieux de celles qui paraissent le plus propres à cet objet; car c'est moins de leur nombre que de leur qualité, que rejaillit la lumière.

Il ne faut employer, autant qu'il est possible, que des instrumens parfaits; faire les expériences avec tout le soin dont on est capable; en examiner toutes les circonstances avec l'attention la plus scrupuleuse, les peser, les mesurer et les déterminer exactement: car les circonstances les plus minutieuses en apparence ont aussi leurs causes, qui, en se compliquant avec les causes principales, en modifient tellement l'action, qu'il est impossible d'apprécier au juste les unes, sans connaître exactement les autres. Il faut, aussi, souvent répéter les expériences, et en varier les circonstances, pour voir si les résultats subissent réellement les changemens qu'on avait cru prévoir; si, en augmentant ou en diminuant l'intensité de la cause, celle de l'effet lui-même augmente ou diminue suivant les mêmes degrés, etc. Cette marche est lente et pénible; mais c'est la seule qui conduise sûrement à la vérité.

21. Les règles précédentes, en proscrivant l'abus des hypothèses, en établissent et en dirigent le véritable usage, qui est indispensablement nécessaire aux progrès de la physique. En effet, comme le savant P. Boschovich l'a judicieusement remarqué, le philosophe qui cherche à pénétrer les mys-

tères de la nature, ressemble à un homme qui tâche de déchiffrer une lettre écrite en caractères dont il ignore la signification. Que fait donc celui-ci? Il commence par établir quelques suppositions; les suit les unes après les autres, les compare entre elles, et parvient enfin à deviner quelques mots. Il conserve, pour le reste de la lettre, les hypothèses qui lui ont jusqu'alors réussi, et en les modifiant de temps en temps, il arrive enfin, après de nombreuses chutes, à une clef générale, qui, en lui présentant un sens juste et suivi, semble lui découvrir tout le mystère. Il serait possible qu'il se trompât encore, puisque les mêmes caractères, si l'on employait d'autres clefs, pourraient présenter d'autres sens très-bien suivis chacun, quoique bien différens entre eux: cependant, dès qu'il a trouvé une seule clef qui répond parfaitement aux conjonctures et aux affaires dont il s'agit, surtout si la lettre est longue, il regarde cette clef unique comme la véritable.

Il en est de même du physicien: il ne tombe le plus souvent, qu'après bien des faux pas, sur une cause plausible des phénomènes; et dès qu'il en a trouvé une qui donne constamment et généralement des

résultats parfaitement d'accord avec ceux de l'observation, il la regarde comme la vraie cause des phénomènes. Cette cause reste encore en quelque sorte *hypothétique*, tant qu'il n'est pas démontré qu'elle est la *seule* capable de satisfaire à toutes les circonstances du phénomène : mais une démonstration rigoureuse de cette nature est impossible à l'homme ; en sorte que si le physicien prouve que la cause qu'il apporte, a existé avec le phénomène, et que celui-ci, dans tous ses détails, en est une suite nécessaire, il serait injuste et même ridicule d'en demander davantage.

§. IV. *Nécessité de l'emploi des mathématiques et de la chimie en physique.*

22. Si nous sommes attentifs à ce qui se passe dans notre ame, lorsqu'elle est frappée de quelque phénomène, nous remarquerons bientôt que, d'un côté, elle en a la vision intuitive, et de l'autre, la sensation. En tant qu'elle le voit, il répond à un certain espace qu'il remplit, à un certain temps dans lequel il existe ; elle ne le saisit que successivement, et n'y trouve que des parties semblables et continues. Sous ce rapport,

les phénomènes sont donc des *grandeurs étendues.*

Mais un espace vide de toute matière ne peut affecter nos organes, ni la matière elle-même exister avec de l'étendue seulement; il faut encore qu'elle ait certaines qualités, comme de la solidité, de la fluidité, etc., qui répondent à nos sensations. Or l'ame saisit ces sortes de qualités tout entières à la fois : elles ne sont pas composées de véritables parties; elles n'ont que des degrés qui peuvent varier à l'infini. Les phénomènes sont donc, sous cet autre rapport, des *grandeurs intenses.*

Or toutes les grandeurs entrent dans l'objet des mathématiques. Donc, par la nature même des phénomènes, *il est impossible d'en donner une théorie, une explication complète, sans employer les mathématiques.*

23. En effet, pour l'explication certaine et complète d'un phénomène, il ne suffit pas d'en assigner la cause; il faut encore mesurer cette cause, c'est-à-dire, en déterminer l'énergie, souvent dans ses différens degrés, pour s'assurer qu'elle suffit à tous les effets qu'on lui attribue. Si c'est donc au physicien à imaginer d'abord la manière mécanique dont les phénomènes peuvent arriver, c'est au

géomètre à en calculer ensuite les diverses parties : tous deux doivent se réunir pour comparer les résultats du calcul à ceux de l'expérience ou de l'observation. Si ces résultats s'accordent dans tous les points, et que ces points soient d'ailleurs très-nombreux, on a toute la certitude qu'on puisse demander de la physique. Cette certitude ne se borne pas aux seuls objets qu'on a directement observés ou soumis à l'expérience; elle s'étend encore sur tous ceux qui s'y lient par des raisonnemens mathématiques, lors même qu'ils échappent à toutes les tentatives de l'art et à tous les moyens d'observation : d'où il est aisé de juger de l'importance du rôle que les mathématiques jouent dans la physique.

Il est même vrai de dire que, dans toute la physique, il ne peut y avoir de science proprement dite, qu'autant qu'on y trouve de mathématiques : car elles seules peuvent, par leurs conclusions, lui fournir les seules connaissances *a priori* dont elle soit susceptible; elles seules peuvent d'un petit nombre de principes puisés dans la nature même, déduire, d'une manière infaillible, des conclusions presque infinies et par leur nombre et par l'intervalle immense qui

semble les séparer des premières données de la nature, et toutes cependant aussi naturelles que les principes dont elles dérivent; elles seules, enfin, peuvent soumettre à un examen certain la généralité même des principes, en démontrer la subordination et la dépendance, et établir ainsi, en quelque sorte, une échelle de principes.

Dans la physique pratique, la nécessité des mathématiques est peut-être encore plus sensible. Aussi avait-il passé en proverbe, dès le temps d'Aristote, que *la réunion de la physique et des mathématiques est la mère des arts.*

24. La chimie est peut-être encore plus étroitement liée à la physique que les mathématiques : car que de phénomènes qui dépendent directement des qualités particulières des molécules intégrantes des corps, de leur quantité relative dans les différens composés, et de leur action intime et réciproque! Or c'est à la chimie à déterminer tous ces objets. Elle est donc indispensable dans la physique. Il semble même qu'elle doit être regardée comme une partie intégrante de la physique.

25. Il suit du moins des numéros précédens, que la physique, pour atteindre son but,

doit appeler à son secours les mathématiques et la chimie. Mais de ces deux belles parties des connaissances humaines, l'une ne marche qu'au flambeau de l'évidence, et l'autre n'est guidée que par les lueurs de l'expérience. Les mathématiques ne tirent de conclusions qu'en nous en faisant voir intuitivement la liaison nécessaire avec les principes : ainsi la partie de la physique à laquelle on les applique, est *une véritable science, à raison de ses conséquences.* Au contraire, parce que nous ignorons les lois générales des attractions chimiques, il nous est impossible de voir évidemment la nécessité de leurs conséquences. D'où il suit que ces conséquences ne sont certaines, qu'autant qu'elles sont, comme leurs principes, immédiatement appuyées sur l'expérience. Par conséquent, la partie de la physique qui n'explique les phénomènes que chimiquement, ne peut être, dans l'état actuel de nos connaissances, qu'*une doctrine expérimentale*, et non une *véritable science*, dont l'idée emporte toujours avec elle celle d'une liaison évidemment nécessaire entre les principes et les conséquences.

D'ailleurs la chimie, par sa manière d'envisager son objet, par ses principes et par

la fin prochaine qu'elle se propose, semble devoir constituer une doctrine *sui generis*, tout-à-fait à part. 1.° Entre tous les phénomènes, elle ne considère que ceux qui dépendent directement des dernières molécules des corps, dont la sphère d'activité est comme infiniment petite, et qui par conséquent n'agissent chacune que sur un petit nombre d'autres molécules. Les effets de leurs actions respectives sont donc comme isolés, et en quelque sorte indépendans les uns des autres: ils ne deviennent sensibles que par l'aggrégation des effets semblablement produits par différentes molécules sur différentes molécules, et non par un résultat unique et identique, produit par le concours unanime et combiné des mêmes causes. 2.° La chimie attribue principalement l'action réciproque des molécules matérielles à des affinités, ou à des attractions propres à chaque espèce de molécules, et qui les sollicitent avec plus ou moins d'énergie à se combiner intimement, c'est-à-dire, à former des corps dont les moindres parties se composent des mêmes principes et dans le même rapport entre eux, que ces corps mêmes auxquels elles appartiennent. 3.° C'est la connaissance de cette combinaison intime des molécules, et des

lois suivant lesquelles elle s'opère, qui est le but immédiat de la chimie.

L'ensemble de ces caractères ne convient qu'à la chimie. Dans aucune autre partie de la physique, on ne se propose de connaître la combinaison intime et réciproque des molécules de matière : on pourrait tout au plus y partir de cette connaissance pour expliquer la formation ou la décomposition des corps, si toutefois cette explication même n'est pas tout entière du domaine de la chimie. De plus, les diverses forces que l'on considère dans les autres parties de la physique, ne doivent pas se confondre avec les affinités chimiques : le plus souvent, ce ne sont que des forces purement mécaniques, c'est-à-dire, des forces qu'un corps n'exerce sur d'autres corps qu'en vertu de son mouvement ou de sa tendance au mouvement. Les attractions mêmes, qui jouent le plus grand rôle dans la mécanique céleste et dans la théorie de l'électricité et du magnétisme, doivent au moins être modifiées par les circonstances, pour se convertir en affinités : elles agissent à des distances sensibles, suivant une loi connue, et peuvent ainsi, comme les forces mécaniques, être soumises au calcul : enfin elles concourent à produire

un même effet ; et l'on ne calcule leurs effets sur des élémens isolés, que pour arriver à la connaissance de cet effet unique. Quelques attractions, de la nature de celles que l'on suppose pour expliquer l'ascension des liqueurs dans les tubes capillaires, les réfractions, réflexions et inflexions de la lumière, etc., paraissent se rapprocher davantage des affinités chimiques : mais elles en diffèrent au moins par la manière dont on les envisage.

Il est donc à propos de suivre la marche tracée par la plupart des auteurs, et de séparer dans la physique la partie mathématique de la partie chimique, soit en les donnant dans des ouvrages différens, soit en leur consacrant, dans le même ouvrage, des titres particuliers.

Ce serait peut-être ici le lieu de donner une idée des divisions ou des différentes parties de la physique : mais nous renvoyons, pour cet objet, aux *Tableaux de physique*, par M. Baruel.

CHAPITRE II.

Des propriétés plus ou moins générales des corps.

26. Nous avons déjà remarqué (2) que, par rapport à notre faculté de connaître les objets, *un corps est tout ce qui peut tomber sous nos sens extérieurs.*

Les propriétés d'un corps sont *tout ce qu'il a de constant et d'uniforme dans sa manière d'être ou d'agir.*

Comme nous nous représentons les corps avec tout ce qui leur appartient, placés hors de nous et dans l'espace, nous exposerons, avant tout, l'idée que nous avons de l'espace.

27. L'espace se présente à l'esprit, comme *une grandeur infinie dans ses trois dimensions, nécessaire, continue, composée de parties juxta-posées, intrinsèquement semblables entre elles, continues, et par conséquent mathématiquement divisibles à l'infini, mais inséparables, immobiles et incapables d'affecter nos sens extérieurs.*

1.° *Grandeur infinie :* car il nous est impossible d'imaginer qu'un espace soit borné, sans concevoir en même temps qu'il ne l'est

que par un autre espace; et l'idée d'un espace circonscrit par de certaines limites, sans être renfermé dans un autre espace, se détruit elle-même. 2.° *Nécessaire :* car après avoir anéanti, par la pensée, tous les corps qui existent dans l'espace, il nous reste encore dans l'esprit l'*intuition* de cet espace. 3.° *Continue :* toutes ses parties sont elles-mêmes des espaces, qui ne peuvent être séparés que par des espaces. 4.° Ces parties sont donc divisibles à l'infini, comme on le démontre en géométrie. 5.° Mais elles sont inséparables et immobiles, parce qu'elles ne peuvent s'écarter les unes des autres, ni changer de position entre elles; les corps qui y existent, sont seuls susceptibles de ces modifications. 6.° Enfin, par la même raison, les parties de l'espace ne peuvent affecter nos organes.

28. *Étendue.* Nous ne pouvons concevoir aucun objet de nos sens extérieurs qui n'occupe quelque partie de l'espace. Ainsi tout corps, comme la partie de l'espace à laquelle il répond, a les trois dimensions, c'est-à-dire, est *étendu.*

29. *Figure.* L'étendue de tout corps est renfermée dans de certaines limites, qui nécessairement sont disposées entre elles de

quelque manière. Or c'est l'arrangement respectif des limites d'un corps qui détermine la *figure* de ce corps. Tout corps est donc *figuré*.

30. *Volume, masse*. L'étendue et la figure ne constituent seules qu'un corps géométrique : il faut que cette étendue renferme de la matière, pour qu'il en naisse un corps *physique*, lequel n'est autre chose que de la matière terminée par de certaines limites.

L'espace terminé par les limites d'un corps s'appelle le *volume* de ce corps (c'est le solide de la géométrie); et la somme totale des parties matérielles, renfermées dans cet espace, est ce qu'on nomme la *masse* du corps, sa *quantité de matière*.

31. *Impénétrabilité*. Quand nous essayons de placer de la matière dans un espace déjà occupé par de la matière, nous sentons de la résistance, et nous ne parvenons à notre but qu'en déplaçant cette autre matière. D'où il est naturel de conclure (19), que *deux particules quelconques de matière ne peuvent exister à la fois dans la même partie de l'espace*.

C'est cette propriété de la matière qu'on appelle *impénétrabilité*. Si elle convient à la matière précisément comme matière, elle est

absolue. Si au contraire elle naît de forces essentielles à la matière, de la nature des forces élastiques et qui donnent aux corps en contact la vertu de se repousser mutuellement, elle n'est que *relative* : dans ce cas, l'énergie des forces répulsives croîtrait avec la diminution des volumes; et la matière ne serait impénétrable que parce qu'il n'existerait pas de force capable de réduire son volume à zéro.

Il est impossible de décider par des expériences directes, laquelle de ces deux impénétrabilités est celle de la nature. Toutes deux semblent devoir représenter les phénomènes avec la même fidélité; mais la première promet plus de facilité dans les applications. Ainsi, à l'exemple des géomètres et de presque tous les physiciens, nous l'adopterons, c'est-à-dire, *nous supposerons la matière absolument impénétrable.*

32. *Porosité.* Nous ne connaissons aucun corps qui ne puisse diminuer de volume, sans rien perdre de sa masse. Si donc la matière est impénétrable, il faut que celle d'aucun corps ne remplisse exactement son volume, ou que ce volume contienne des espaces plus ou moins grands, plus ou moins nombreux, qui soient entièrement vides de

toute matière. Ces vides disséminés dans les corps sont ce qu'on nomme leurs *pores absolus.* L'impénétrabilité absolue des corps étant donc une fois admise, l'expérience nous force à mettre la *porosité absolue* au nombre des propriétés générales des corps.

Il ne faut pas confondre ces pores avec les vacuoles qu'à l'aide d'un microscope, ou par d'autres procédés, nous découvrons dans un grand nombre de corps : car ces petits espaces, quoique vides des parties grossières du corps, peuvent bien contenir des particules matérielles plus déliées. L'expérience ne nous laisse aucun doute sur l'existence de cette espèce de porosité des corps, qui est indépendante de l'impénétrabilité de la matière ; mais la réalité des pores absolus échappe, avec l'impénétrabilité absolue, à toutes ses recherches.

33. La *densité* d'un corps est *le degré auquel sa matière remplit son volume.* Ainsi un corps parfaitement dense serait celui dont la matière remplirait entièrement le volume.

Qu'on imagine donc que la matière d'un corps se resserre et se concentre au point de former un tout continu et sans pores : cette masse occupera alors un espace parfaitement égal à son volume. *Le rapport de cet*

espace fictif au volume effectif du corps, est la mesure de la densité de ce même corps.

34. Or les grandeurs des masses de deux corps quelconques sont entre elles, comme les espaces qu'elles rempliraient si elles devenaient chacune un tout continu et sans pores. En désignant donc les masses de deux corps par les lettres m, M; leurs volumes effectifs par v, V; leurs densités par δ, Δ : on aura, par le numéro précédent,

$$\delta : \Delta :: \frac{m}{v} : \frac{M}{V};$$

ou bien ... $\delta : \Delta :: \frac{m}{M} : \frac{v}{V};$

ou enfin ... $\delta = \frac{m}{M} \cdot \frac{V}{v} \cdot \Delta.$

C'est-à-dire, *la densité d'un corps quelconque est égale à la densité de tout autre corps multipliée par la raison directe des masses et la raison inverse des volumes de ces deux corps;* ou, ce qui revient au même, *les densités des corps sont entre elles en raison composée de la raison directe des masses et de la raison inverse des volumes.*

35. En effet, un corps est d'autant plus dense (33) qu'il a plus de masse sous un volume donné, et qu'il a un moindre vo-

lume, la masse restant la même. Si donc on appelle

la *masse*,	le *volume*,	la *densité*	du *corps*;
m	v	δ	A
M	V	Δ	B
M	v	D	C

on aura $\begin{cases} 1.° \ \delta : D :: m : M \\ 2.° \ D : \Delta :: V : v \end{cases}$

Donc $\delta D : \Delta D :: mV : Mv$; ou $\delta : \Delta :: \frac{m}{M} : \frac{v}{V}$, comme dans le n.° précédent.

36. Si l'on connaissait donc les masses et les volumes des corps, il serait facile de trouver les rapports de leurs densités. Or la géométrie et l'hydrostatique donnent des moyens pour déterminer les volumes : la statique en fournit aussi pour trouver le rapport des masses. Si nous avions donc quelque corps parfaitement dense (33), et dont la masse pût par conséquent s'évaluer, comme les volumes, en mesures déterminées, par exemple, en mètres cubes, nous pourrions aussi connaître les densités *absolues* des autres corps, en les rapportant toutes à celle de ce même corps, comme nous rapportons les mesures des volumes à un mètre cube.

Mais ne connaissant ni ne pouvant connaître aucun corps parfaitement dense dans

la nature, nous ne pouvons déterminer que les densités *relatives* des corps. Pour y parvenir, on convient de les rapporter à celle d'un même corps bien connu, par exemple, à celle de l'eau distillée à une température et sous une pression données ; et c'est la densité de cette eau, et non celle d'un corps parfaitement dense (33), qu'on prend pour l'unité des densités. On prend de même, pour l'unité des volumes, un volume connu, par exemple, un mètre cube, et pour l'unité des masses, celle de l'eau qui occuperait ce volume dans les circonstances supposées. Ces conventions une fois admises, on voit que les densités, les masses et les volumes des corps, peuvent être regardés comme de purs rapports mathématiques à leurs unités respectives, ou comme des nombres abstraits, auxquels on peut faire subir toutes les opérations de l'arithmétique.

37. Si, dans l'équation du n.° 34, l'on fait $V = 1$, $M = 1$, $\Delta = 1$; on aura $\delta = 1 . \frac{m}{1} . \frac{1}{v}$, ou $\frac{\delta}{1} = \frac{m}{1} . \frac{1}{v}$, ou enfin $\delta = \frac{m}{v}$: équation qu'on énonce ordinairement de la manière suivante : *La densité d'un corps est égale au quotient de sa masse divisée par son volume.*

Cette proposition peut présenter un sens absurde; car, la masse et le volume étant des grandeurs hétérogènes, il est impossible de diviser l'une par l'autre : mais elle n'offrira qu'un sens exact, si on la regarde comme l'expression abrégée de l'une des suivantes :

« La densité d'un corps donné est égale à « l'unité des densités multipliée par le rap- « port direct de la masse de ce corps à l'u- « nité des masses, et par le rapport inverse « de son volume à l'unité des volumes. » C'est ce qui est exprimé par l'équation $\delta = 1.\frac{m}{1}.\frac{1}{v}$.

« Le rapport de la densité d'un corps, « dont la masse et le volume sont *m* et v, « à la densité d'un autre corps dont la den- « sité, la masse et le volume, sont les unités « de leurs espèces, est égal au produit du « rapport direct de *m* à l'unité des masses, « et du rapport inverse de v à l'unité des « volumes. » C'est ce que signifie l'équation $\frac{\delta}{1} = \frac{m}{1}.\frac{1}{v}$.

38. *Homogénéité; hétérogénéité.* Le nom d'*homogènes* se donne, dans les mathématiques pures, *aux grandeurs quelconques de*

même espèce; dans la mécanique, *aux corps d'une densité uniforme ou égale dans toute leur étendue;* dans la chimie, *aux corps chimiquement simples*, ou *que l'art n'a pas encore pu décomposer en parties qui accusent des propriétés différentes.*

Hétérogène est l'opposé d'homogène. Ainsi, en *mécanique*, on appelle *hétérogènes* les corps qui dans toutes les parties égales de leurs volumes ne renferment pas des masses égales; et par *masses égales* on y entend des masses qui, animées de vitesses égales et contraires, se font équilibre, quelles que soient d'ailleurs les propriétés des molécules intégrantes de ces masses. Au contraire, en *chimie*, si les corps se laissent décomposer en des parties qui, abstraction faite du rapport de leurs densités, diffèrent dans leurs propriétés, on les nomme *hétérogènes*, sans prononcer s'il y a des différences essentielles dans la nature même des molécules intégrantes de ces diverses parties, ou si ces parties ne diffèrent que par la figure et la grandeur de leurs pores et de leurs molécules.

39. La *divisibilité physique* de la matière *est la propriété en vertu de laquelle ses parties peuvent être séparées*, ou cesser de se toucher et d'appartenir au même tout.

Les phénomènes de la nature, les expériences de la chimie et les procédés des arts, concourent à prouver que les corps sont composés de particules si déliées qu'elles échappent presque à notre imagination même. On en trouve des preuves multipliées dans les ouvrages de *Lewenhœk*, *Keill*, *Neewentitt*, *Réaumur*, *Mussenbrœk*, *Nollet*, *Brisson*, etc. En voici quelques-unes, que nous rapportons d'après M. *Hassenfratz*. (*Journ. de l'École polytechn.* 6.e cah.)

Une certaine quantité d'*assa fœtida* diminue de $\frac{2}{3}$ de décigramme en six jours; et son odeur se fait sentir à deux mètres de distance. Mais cette odeur n'est due qu'aux particules odorantes qui viennent picoter les houppes nerveuses de nos narines. L'évaporation est donc continue dans une sphère de trente-six mètres cubiques. Si l'air s'y renouvelle toutes les minutes, et que cet espace soit plein de molécules odoriférantes, dissoutes ou répandues dans l'air, le volume d'air renouvelé est, pour six jours, de 311040 mètres cubiques. Deux tiers de décigramme d'assa fœtida occuperaient donc ce même volume, et par conséquent un décigramme entier occuperait un volume de 471272 mètres cubiques = 47 12720 00000 centimètres cubiques. En

supposant donc, avec Lewenhoek et Keill, qu'on puisse distinguer des grains de sable tellement fins qu'il en faille 50000 pour emplir un centimètre cubique; un décigramme d'assa fœtida peut se diviser en 23 56360 00000 00000 particules de la grosseur de ces grains de sable.

Le musc est encore bien plus divisible, puisqu'un demi-décigramme de cette matière se fait sentir d'une manière incommode, pendant vingt ans, dans un appartement où l'air se renouvelle tous les jours.

Lewenhœk annonce avoir observé, dans des eaux qui contenaient des plantes en macération, des animalcules dont il compare la grosseur à un grain de sable tel que ceux dont nous venons de parler. La longueur des plus petits n'était que la dix-millième partie de celle de ces grains de sable. Ainsi les plus petits n'étaient tout au plus que le $(\frac{1}{10000})^3$ d'un grain de sable. Conséquemment il en aurait fallu 50 00000 00000 pour emplir un centimètre cube.

Keill, en comparant les hommes aux animalcules de Lewenhœk, a trouvé que leurs grandeurs étaient comme 3456 00000 00000 00000 : 1.

Les globules du sang humain sont, d'après

les expériences de Lewenhoek et Keill, de 0,00025 centimètres cubes. Si ces petits animaux avaient un sang analogue, dont les globules fussent dans le rapport des deux dimensions, la petitesse de ces globules serait telle qu'il en tiendrait 864 00000 00000 00000 00000 dans un centimètre cube. En suivant les mêmes considérations, Keill trouve qu'un grain de sable emploierait dans son volume un plus grand nombre de ces globules, que 10256 des plus hautes montagnes ne contiendraient de grains de sable.

Un décigramme de cuivre, dissous dans l'acide sulfurique, peut, par l'addition d'un peu d'ammoniaque, colorer en bleu 400 litres d'eau. En supposant donc que le centimètre cube pût contenir 50000 grains de sable très-fin, et que chaque goutte d'eau, grosse comme un grain de ce sable, contînt une des parties colorantes, le décigramme se trouverait divisé en 20 00000 00000 parties.

Le tireur d'or peut avec un gramme d'or recouvrir un cylindre d'argent de 360 grammes. Ce cylindre produit, en passant à la filière, un fil long de 10 7526 mètres. En passant au laminoir, il s'aplatit, et s'allonge de $\frac{1}{7}$; ce qui porte sa longueur à 1 22887 mètres, susceptibles d'être divisés, dans leur largeur,

en deux parties, et de former une longueur de 2 45774 mètres. Comme chaque côté de ces deux lames est doré, on peut la considérer comme une longueur de 983096, ou de 10 00000 mètres à peu près. Or le millimètre peut se diviser en sept parties visibles. Le gramme d'or peut donc, par ce procédé, se diviser en 70000 00000 parties visibles.

En partant des mêmes données, nous trouvons que l'épaisseur de l'or sur le fil dont nous venons de parler, est environ la dix-millionième partie d'un pouce de notre ancienne mesure : cette épaisseur peut être regardée comme le côté d'un cube d'or $= \frac{1 \text{ pouc. cub.}}{(100\,00000)^3}$. Un pouce cubique d'or peut donc par le procédé des fileurs se diviser en 10 00000 00000 00000 00000 petits cubes. Ce nombre surpasse celui des mètres cubiques contenus dans le globe de la terre.

40. Ces exemples prouvent suffisamment la prodigieuse divisibilité de la matière, mais ne peuvent nous donner aucune lumière sur l'impossibilité ou sur la nécessité qu'il y ait des bornes à cette divisibilité. *La matière est-elle donc, ou n'est-elle pas, divisible à l'infini*[1] *?*

1. Cette question ayant été autrefois vivement agitée dans les écoles, on sera peut-être curieux de connaître les raison-

Dans ce dernier cas, les dernières parties auxquelles, par la nature même de la matière, s'arrêterait la division, sont-elles sans aucune étendue, des points de Zénon, de purs *monades ?* ou bien sont-elles des *atomes*, d'une étendue indéfiniment petite, si l'on veut, mais enfin étendus, figurés et physiquement insécables ? La solution de ces questions paraissant au-dessus de l'intelligence humaine

---

nemens dont on appuyait les deux opinions. En voici quelques-uns.

1.re OPINION. *La matière n'est pas divisible à l'infini.* Un tout quelconque contient réellement en lui-même toutes les parties auxquelles il peut être divisé. Si donc la matière était divisible à l'infini, elle renfermerait réellement un nombre infini de parties. Or, l'idée d'un nombre infini de parties réellement contenues dans la matière, est une absurdité : car, d'un côté, elle représenterait un nombre infini comme achevé et actuellement existant dans la matière, et de l'autre côté, elle ne peut pas représenter ce nombre comme existant réellement, par là même qu'il est infini et ne peut par conséquent être jamais atteint.

D'ailleurs toutes les parties qui composent la matière, sont autant de substances, ou peuvent subsister par elles-mêmes. Leur réunion est donc purement accidentelle, et leur liaison mutuelle n'est nullement de leur essence. On peut donc supprimer toute réunion, toute liaison, sans détruire les dernières parties de la matière. Ces parties sont donc physiquement simples, et partant indivisibles. Or, dans la division de la matière, on arriverait enfin à ces parties. La matière n'est donc pas divisible à l'infini.

(14), nous nous bornerons à exposer, dans la proposition suivante, l'opinion qui paraît le plus généralement adoptée sur ce sujet.

41. *Hypothèses.* Les élémens dont se composent tous les corps de la nature, peuvent être regardés comme des *atomes*, c'est-à-dire, *comme des corpuscules indéfiniment petits, absolument impénétrables, physiquement indivisibles et diversement figurés;* de sorte que tous les changemens que subissent les diverses

---

Dans cette opinion, rien ne peut être composé que de parties physiquement simples, et l'étendue n'est pas essentielle à la matière.

2.° Opinion. *La matière est divisible à l'infini.* Nous ne pouvons nous représenter la matière que renfermée dans un certain espace : elle a donc autant de parties que cet espace. Or, la géométrie démontre que, dans tout espace, il y a un nombre de parties qui peut croître jusqu'à l'infini : donc la matière elle-même est aussi composée de parties dont le nombre peut croître à l'infini. Mais ces parties peuvent perdre leur liaison et se séparer : donc la matière est divisible à l'infini.

En effet, dans l'opinion opposée, il faut admettre qu'une substance étendue ne peut être composée que de parties sans étendue. Or c'est ce qu'on ne saurait concevoir. Donc, etc.

M. *Kant* prétend concilier ces deux opinions, en admettant la vérité de la seconde pour le cas où l'on ne regarde les phénomènes que comme de pures représentations à notre esprit, et celle de la première pour le cas où l'on considère la matière en elle-même et comme indépendante de nos idées.

espèces de corps, dépendent uniquement de ce que ces atomes se séparent les uns des autres, et se réunissent ensuite de différentes manières, pour former de nouvelles combinaisons.

1.° *Indéfiniment petits.* Cette supposition est indiquée par les phénomènes (39). 2.° *Absolument impénétrables* (31). 3.° *Indivisibles par des forces existantes dans la nature.* C'est ce qui semble indiqué par l'admirable uniformité avec laquelle la nature se reproduit depuis six mille ans : on ne remarque pas qu'il se forme de nouvelles espèces de plantes, d'animaux; on voit toujours renaître les mêmes espèces, avec les mêmes qualités qu'elles ont eues depuis qu'on les connaît. Mais si quelque force créée pouvait diviser les élémens qui constituent chaque espèce de corps, la nature en général n'aurait-elle pas changé de face par les différentes modifications qu'auraient souffertes les molécules intégrantes des espèces particulières ? Il semble donc (c'est la pensée de *Newton*) que Dieu, en créant la matière, l'a composée de particules insécables, dont les dimensions, les figures et les autres qualités étaient assorties aux fins qu'il se proposait.

42. Les atomes, en tant que leur manière

d'agir dépend de leurs figures, peuvent être considérés comme de petites *machines.* C'est pour cela qu'on donne le nom de *Philosophie mécanique* à celle qui n'explique les divers phénomènes de la nature, que par les propriétés que nous venons de supposer aux atomes, par l'*identité de leur nature*, par la différence de la grandeur et de la figure de ces mêmes atomes et des pores qui les séparent dans les corps, et par l'intervention de forces purement extérieures (130). En mettant à part l'impénétrabilité absolue, on voit que cette philosophie a le précieux avantage de partir de principes dont on se représente clairement la possibilité : aussi a-t-elle été en vogue parmi les philosophes, depuis Moschus, Leucippe, Démocrite, Lucrèce, etc., jusqu'à Descartes. Newton lui-même ne paraît pas éloigné de l'admettre exclusivement : cependant il sentait que sa découverte de la pesanteur universelle rendait douteuse la possibilité d'expliquer *mécaniquement* tous les phénomènes de la nature.

Les Kantiens nomment *Philosophie dynamique,* celle qui tâche de ramener l'explication de la constitution et de l'action des corps, à des forces primordiales et essentielles à la matière, les unes attractives à toutes les dis-

tances (c'est la gravité universelle), les autres répulsives suivant toutes les directions, mais dont l'effet ne se manifeste qu'aux surfaces en contact; et c'est dans ces deux espèces de forces qu'ils font consister l'essence de la matière. L'existence de l'attraction universelle est incontestable; et sans prononcer sur son origine, on est assez dans l'usage de la regarder comme essentielle à la matière. Quant à la supposition de forces répulsives aussi essentielles à la matière, peut-être ne présente-t-elle pas assez d'avantages pour mériter la préférence sur les hypothèses qui servent de base à la philosophie mécanique.

43. *Compressibilité.* Un corps est *compressible quand on peut, par l'application d'une force extérieure, en rapprocher les parties, et le réduire ainsi à un moindre volume.* La matière, étant supposée absolument impénétrable (31), n'est pas compressible : d'après les expériences faites jusqu'à présent, les liqueurs en général, le plomb et l'étain, ne le sont non plus que très-peu. On conçoit cependant que, tous les corps étant poreux (32), tous doivent être compressibles : mais l'impénétrabilité de la matière doit mettre des bornes à la compression des corps.

44. La *roideur* est la propriété en vertu

de laquelle les corps résistent à ce qu'on les plie ou à ce qu'on les courbe. On ne donne le nom de roides qu'aux corps qui jouissent de cette propriété dans un degré bien marqué; par exemple, aux barres de fer.

La *flexibilité* ou *souplesse* est la qualité des corps qui se laissent *aisément* plier ou courber. Ainsi les fils et les cordons de chanvre, de soie, etc., sont flexibles.

45. *L'élasticité* en général est *la propriété par laquelle les corps pliés, tendus ou comprimés, font effort pour recouvrer leur première forme ou leur premier volume*, et reviennent réellement à leur premier état, dès que la cause qui l'avait changé cesse d'agir sur eux. L'ivoire, l'acier trempé, l'air atmosphérique, sont élastiques : tous les corps même paraissent élastiques, mais dans des degrés très-différens.

Un corps *parfaitement élastique* serait celui qui se rétablirait ou tendrait à se rétablir dans son premier état, avec une force parfaitement égale à celle qui aurait changé cet état.

46. Si on laisse tomber une bille d'ivoire sur une table de marbre noir, polie et enduite d'une légère couche d'huile; cette bille rejaillira, après avoir imprimé sur cette

table une tache ronde d'un diamètre plus ou moins grand, suivant la hauteur de la chute. D'où il suit que cette bille, en frappant la table, se comprime suivant son diamètre perpendiculaire à cette même table et se tend suivant une direction qui lui est parallèle. De même une lame d'acier que l'on plie, se comprime dans sa partie concave, et se tend dans sa partie convexe. C'est la force avec laquelle les corps, dans ces circonstances, reviennent ou tendent à revenir à leur premier état, qu'on appelle proprement *force élastique*.

Une corde de boyaux que l'on a tendue, se contracte et revient à sa première longueur, dès qu'on cesse de la tendre. La force avec laquelle ces sortes de corps reprennent ou s'efforcent de reprendre leur premier état, se nomme *force de contraction ;* et cette espèce d'élasticité pourrait être désignée par le nom de *contractibilité*.

Nous parlerons bientôt d'une troisième espèce d'élasticité, qui ne convient qu'aux fluides aériformes, et qu'on nomme *expansibilité*.

47. La *cohésion* est *la propriété par laquelle un corps résiste à la séparation de ses parties, ou plutôt à la diminution de la quan-*

tité de leur contact réciproque. Tous les corps, excepté vraisemblablement les fluides élastiques, sont composés de parties plus ou moins cohérentes entre elles.

48. *Fluidité. Un fluide est un amas de molécules très-déliées, et si mobiles entre elles, que la moindre force suffit pour les faire* glisser *les unes entre les autres, quelle que soit d'ailleurs leur cohésion ou leur action réciproque.* On dit que les molécules *glissent* les unes entre les autres, lorsque, sans changer la grandeur de leur contact mutuel, elles touchent cependant successivement, de tous côtés, des molécules différentes.

C'est dans cette parfaite mobilité des molécules entre elles, que semble consister la nature des fluides; et M. *de la Grange* en a déduit toutes les lois de la mécanique des fluides. Elle donne aussi naissance à une autre propriété également remarquable, également propre aux seuls fluides, et qu'*Archimède, d'Alembert, Euler,* etc., ont prise pour base de cette même science : c'est qu'*une pression quelconque, exercée suivant une direction quelconque, sur un point aussi quelconque d'une masse fluide*, persévérant dans l'équilibre, *se répand également dans tous les autres points et dans tous les sens;* de

sorte que tous les points de cette masse, en tant qu'elle persévère dans l'équilibre, tendent, en vertu de cette seule pression, à se mouvoir dans toutes les directions avec une force égale à cette même pression.[1]

49. Les fluides sont ou *liquides* ou *aériformes*. L'eau, le mercure, dans leur état ordinaire, sont des liquides : l'air atmosphérique, la vapeur d'eau, sont des fluides aériformes ou des gaz.

---

1. Cette propriété revient à ce que, *si à une surface quelconque d'une masse fluide en équilibre on applique une pression quelconque, les surfaces des élémens de cette masse fluide, de la paroi du vase qui la renferme, et de tout corps qui y est plongé, en éprouvent des pressions proportionnelles à ces surfaces mêmes*. Or, par le moyen du principe des vitesses virtuelles (238), cette propriété se déduit aisément de la définition des fluides.

En effet, soit (fig. 1) le vase abCDcd, dont les parois sont inflexibles et inextensibles, rempli d'un fluide quelconque considéré comme non pesant. Aux pistons A et B appliquons des forces P, Q, qui agissent suivant leurs axes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, perpendiculairement à leurs têtes, et qui se fassent réciproquement équilibre; imaginons enfin que, cet équilibre étant infiniment peu troublé, la tête ab du piston A s'avance jusqu'à $a'b'$: à cause de l'incompressibilité ou de la parfaite élasticité du fluide, la tête cd du piston B sera forcée de reculer jusqu'en $c'd'$, de manière que le petit espace prismatique $cdc'd'$ soit égal à $aba'b'$. Si donc on représente par ω, ω' les têtes des pistons A, B, ou les aires des sections perpendiculaires à leurs axes, on aura $\gamma\delta : \alpha\beta :: \omega : \omega'$.

Tous les gaz permanens, ou non permanens, sont *très-compressibles* et *élastiques*; c'est-à-dire, une portion quelconque de ces fluides diminue de volume par une augmentation de pression, et tend alors à reprendre son volume primitif, de sorte que toutes les molécules font effort pour se répandre dans tous les sens vers la surface de la masse dont elles font partie.

Or ces mêmes axes, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, sont les petits espaces parcourus par les points d'application des forces P, Q, le premier suivant la direction de P, le second dans une direction contraire à celle de Q. On aura donc, par le principe des vitesses virtuelles,

$$P : Q :: -\gamma\delta : \alpha\beta \text{; et par conséquent } \frac{P}{\omega} = -\frac{Q}{\omega'}.$$

Donc si le fluide n'est pressé que par les deux forces extérieures P Q, appliquées aux surfaces ω, ω', il faudra, pour l'équilibre, que ces forces soient de directions contraires, et en même temps proportionnelles aux surfaces ω, ω', sur lesquelles elles agissent. Donc aussi la pression que le fluide, en vertu de la force P appliquée à la surface ω, exerce sur toute autre surface ω', est proportionnelle à cette surface ω', ou $Q = -\frac{\omega'}{\omega} P$.

Si dans le vase CD (fig. 2) on en imagine un autre M, vide et percé d'une ouverture c d, à laquelle est appliquée une force Q, par le moyen d'un piston B; on trouvera, comme ci-dessus, $Q = -\frac{P}{\omega}\omega'$. Ainsi la pression que la pression P, exercée sur la surface ω du fluide, fait naître sur la surface ω' de la tête du piston B, ou de la paroi du vase intérieur, ou

C'est cette espèce d'élasticité qu'on nomme *expansibilité.*

La compressibilité et l'expansibilité des fluides aériformes étant beaucoup plus considérables que celles des liquides, cette différence distingue suffisamment ces deux classes de fluides. Voici cependant quelques propriétés qui, ne convenant qu'aux fluides aériformes, sont peut-être encore plus pro-

---

d'un corps plongé dans le fluide, ou enfin du fluide même, est proportionnelle à ω'.

Enfin, en supposant le vase C D (fig. 3) fermé de tout côté et rempli de fluide, excepté dans la partie occupée par un autre vase M, vide et auquel sont appliqués deux pistons, comme ci-dessus, on trouvera encore $Q = -\frac{P}{\omega}.\omega'$; d'où l'on tirera les mêmes conséquences.

Nous avons supposé les directions des forces P, Q perpendiculaires à la surface du fluide. Si elles étaient obliques, on décomposerait chacune en deux autres : l'une parallèle à la surface du fluide, et qui n'exercerait aucune pression sur cette surface; l'autre perpendiculaire à cette surface, et par conséquent telle que nous avons supposé les forces P, Q.

Nous n'avons rapporté cette démonstration, dont le fonds appartient à *Pascal* (*Traité de l'équil. des liqueurs*), que pour faire observer que dans les traités les plus élémentaires, comme dans les plus sublimes, de la mécanique des fluides, on peut en dériver la théorie directement de la nature même des fluides considérés comme des amas de molécules très-déliées, indépendantes les unes des autres et parfaitement mobiles en tout sens.

pres à caractériser ces derniers. Nous n'entendons parler ici ni du calorique ni de la lumière.

50. 1.° *Le volume d'une portion quelconque de tout fluide aériforme est, à température égale, à très-peu près réciproque à la pression qu'elle éprouve*, du moins entre des limites assez étendues de condensation et de raréfaction : c'est la loi de *Mariotte.*

2.° *Donc le ressort de tout fluide aériforme est, à température égale, proportionnel à sa densité.*

3.° Par conséquent *tous les fluides aériformes sont également dilatables par les mêmes degrés de chaleur.*

4.° D'où il semble résulter *qu'il n'y a aucune cohésion sensible entre les différentes molécules des fluides aériformes de la même nature.*

1) Quoique la première de ces propositions, qui est un des principaux fondemens de la mécanique des fluides aériformes, n'ait encore été prouvée directement que pour l'air atmosphérique, cependant il est possible d'étendre la même preuve à tous les gaz permanens. On prend à cet effet un tube de verre, de sept à neuf millimètres de diamètre intérieur, recourbé à angles droits, en forme

de siphon. La plus longue des deux branches est ouverte à son extrémité, et a plus de $2\frac{1}{2}$ mètres de longueur : la plus courte, qui doit être intérieurement bien cylindrique, est scellée hermétiquement à son extrémité, et peut avoir 30 centimètres de hauteur. Ces deux branches sont parallèles entre elles, et solidement attachées sur une planche qui porte une division en centimètres adaptée aux deux branches. On commence par remplir le tube du gaz qu'on veut soumettre à l'expérience; puis on fait couler lentement un peu de mercure dans le coude, jusqu'à ce que, l'instrument étant dans une situation bien verticale, le mercure soit de niveau dans les deux branches, et atteigne la première division de la plus courte. On continue ensuite de verser du mercure dans la branche la plus longue; et à mesure qu'elle s'emplit, on observe, par les divisions qui sont marquées de part et d'autre, quel rapport gardent entre elles la longueur de la colonne fluide renfermée dans la plus courte branche, et la différence des niveaux du mercure dans les deux branches.

Si c'est sur de l'air atmosphérique qu'on opère, ou si l'on a eu soin de réduire le gaz employé à la pression de l'atmosphère qui a

lieu au moment de l'expérience, et que nous supposerons équivalente au poids d'une colonne de mercure de 76 centimètres de hauteur : on remarquera que la longueur de la colonne de gaz, qui était de 30 centimètres lorsque le mercure était au même niveau dans les deux branches, ne sera plus que de 15 centimètres lorsque la différence des niveaux du mercure égalera 76 centimètres; de 10 centimètres, lorsque cette différence = 152 centimètres; enfin de $7\frac{1}{2}$ centimètres, lorsque cette même différence = 228 centimètres. En faisant donc attention qu'au commencement de l'expérience, où le mercure était de niveau dans les deux branches du tube, le gaz renfermé souffrait de la part de l'atmosphère une pression équivalente au poids d'une colonne de mercure de 76 centimètres de hauteur; on voit que les volumes de ce gaz, qui sont dans le rapport des nombres 30, 15, 10, $7\frac{1}{2}$, diminuent, comme les pressions 76, 76 + 76, 76 + 152 = 3.76, 76 + 228 = 4.76 augmentent.

Pour assurer le succès de cette expérience, il faut, avant d'y procéder, 1.° bien dessécher l'intérieur du tube; 2.° ne se servir que de mercure bien sec et distillé, afin d'en rendre la pression comparable à celle de l'atmos-

phère, mesurée avec un bon baromètre; 3.° n'employer que des gaz aussi éloignés qu'il est possible d'être saturés de liquides quelconques; car ces liquides, en se précipitant sous une forte pression, altéreraient les résultats de l'expérience. Avant de mesurer les hauteurs du mercure dans le tube, il faut, 1.° faire sortir de la plus longue branche toutes les bulles d'air qui s'y introduisent avec le mercure ; 2.° ramener le gaz à sa première température; 3.° enfin, tenir les branches du tube dans une position bien verticale, pendant qu'on observe les hauteurs du mercure.

Moyennant ces précautions on obtiendra des résultats assez exacts, lors même que le volume du gaz aura été réduit, par la compression, à sa huitième partie. (Voy. *Sulzer, Mém. de Berlin*, 1753, et *Winkler, Untersuchung über Natur und Kunst*, Leipzig, 1765, 8.°)

2) Quand le volume d'une portion donnée de gaz cesse de varier par la pression qu'elle subit, son ressort fait équilibre et est par conséquent (123) égal à cette pression. Donc, par la première propriété (1.°), ce ressort est réciproque au volume, et partant directement proportionnel à la densité (37).

3) « Considérons un volume de gaz réduit « par la compression à sa huitième partie :

« il y aura dans ce nouvel état quatre fois « plus de molécules, et par conséquent quatre « fois plus de ressorts, appliqués à une sur-« face donnée ; ainsi, puisque la pression est « huit fois plus grande, il est nécessaire que « la tension de chacun de ces ressorts soit « deux fois plus considérable. Elle est donc « réciproque à la distance mutuelle des mo-« lécules voisines, qui dans cet état est deux « fois moindre ; » ou, ce qui revient au même, à température égale, la tension des ressorts des molécules d'un gaz est réciproque à la racine cubique du volume de ce gaz dans ses divers états de condensation ou de raréfaction.

« Il suit de là, que si l'on conçoit des vo-« lumes égaux de deux différens gaz renfermés « dans deux enveloppes de même capacité « et inextensibles, et que l'on suppose qu'à « une température donnée le ressort de ces « deux gaz soit le même ; en augmentant de « la même manière leur température, l'ac-« croissement de leur ressort sera le même, « puisqu'il ne dépend que de la température « (le volume restant ici le même). Concevons « maintenant que les enveloppes qui les con-« tiennent, cessent d'être inextensibles : les « deux gaz se dilateront, jusqu'à ce que leurs

« ressorts soient égaux à la pression de l'at-
« mosphère qui environne ces enveloppes; et
« comme pour chaque gaz le volume est en
« raison inverse du ressort (2.°), les deux gaz
« prendront le même volume et se dilateront
« également » (M. *de la Place*). C'est en effet ce que MM. *Gay-Lussac* et *Dalton* ont prouvé par un grand nombre d'expériences, en constatant que, la pression étant toujours la même, tous les gaz se dilatent de la même quantité par les mêmes degrés de chaleur, et que toutes les vapeurs se dilatent de la même quantité que les gaz permanens.

4) Il faut donc de deux choses l'une, ou que les molécules des différens gaz résistent également à la force expansive du calorique qui tend à les écarter, ou qu'elles n'y opposent aucune résistance sensible. Or il n'est pas vraisemblable que cette résistance, qui est si différente pour toutes les autres espèces de corps, soit sensiblement la même pour tous les gaz. Il semble donc que les molécules des gaz n'ont entre elles aucune cohésion sensible.

51. Dans la mécanique, on a coutume de regarder les liqueurs comme entièrement *incompressibles :* mais on convient que cette supposition n'est pas rigoureusement exacte.

En effet, on sait par les expériences de *Nollet* et de *Mussenbrœk*, que le son se propage à travers l'eau, même récemment distillée. Or la propagation du son ne peut se faire que par des corps élastiques, et par conséquent compressibles. D'ailleurs, il est constant que toutes les liqueurs se contractent par le froid, du moins entre certaines limites de température. Il est donc aussi possible de les condenser par la compression.

Des expériences directes viennent à l'appui de ces raisonnemens. La fameuse expérience de l'académie *del Cimento*, où une boule de métal remplie d'eau et soumise à la presse laissa passer la liqueur à travers ses fentes, n'est rien moins que décisive dans cette question; car il est possible que la boule ne se fende qu'après que l'eau y a subi une compression réelle, et acquis par là une tension de ressort supérieure à la ténacité des parois de la boule. L'instrument que nous avons décrit (50, 1.°), et dont *Hamberger* et *Nollet* se servaient pour prouver l'incompressibilité de l'eau, paraît aussi peu propre à indiquer de très-petites diminutions qui peuvent arriver dans le volume du fluide renfermé dans la plus courte branche.

Canton, célèbre ingénieur anglais, paraît

avoir été plus heureux dans ses tentatives [1]. Il remplissait jusqu'à une certaine hauteur, de diverses liqueurs, différens tubes de verre, terminés en boules creuses dont les diamètres étaient près de cent soixante-sept fois plus grands que ceux des tubes mêmes; il chauffait ensuite ces boules jusqu'à ce que les liqueurs remplîssent entièrement les tubes, et il les scellait alors hermétiquement, pour soustraire ces liqueurs à la pression de l'atmosphère. Enfin, après avoir ramené les liqueurs à leur première température, il observait leurs hauteurs dans les tubes. Il trouva ainsi qu'à température égale ces hauteurs étaient toujours plus grandes, lorsque la partie supérieure des tubes était vide et fermée, que lorsqu'elle était ouverte et que les liqueurs étaient soumises à la pression de l'atmosphère; et il conclut d'un grand nombre d'essais faits avec beaucoup de soin, qu'à la température de dix degrés du thermomètre centigrade, la pression d'une colonne de mercure de soixante-quinze centimètres de hauteur diminuait un volume donné,

1. *Philosoph. Transact. Lond.* vol. 52, pag. 640, et vol 54, pag. 261.

d'*esprit de vin*. . . .	de sa	0,000066[e] partie.
d'*huile d'olive*.	- - -	0,000048[e]
d'*eau de pluie*	- - -	0,000046[e]
d'*eau de mer*.	- - -	0,000040[e]
de *mercure*.	- - -	0,000003[e]

Le même auteur remarqua constamment que, dès qu'il supprimait la pression de l'atmosphère, toutes ces liqueurs reprenaient leur premier volume.

Les expériences de MM. *Abich* et *Zimmermann*[1] confirment ces résultats. Ces auteurs se servirent, pour comprimer les liqueurs, d'un cylindre creux de laiton de 28¾ centimètres d'épaisseur : la partie inférieure, destinée à contenir la liqueur, avait intérieurement 28¾ centimètres de diamètre ; et la partie supérieure, où jouait un piston, n'en avait que 18¾. Ce piston était de fer, et garni de cuirs qu'on avait fait bouillir dans du suif, fortement battus, et qui tenaient ensemble et au piston par le moyen de deux vis de fer : il remplissait si exactement le cylindre, qu'il fallait un poids de 374 hectogrammes pour l'y enfoncer, lorsque la machine était toute vide. La liqueur s'introduisait dans le cylindre par le fond, qu'on

1. *Ueber die Elasticität des Wassers.* Leipz. 1779, 8.°

bouchait ensuite avec un cône enveloppé d'un cuir préparé comme ceux du piston, et dont la base était recouverte d'une plaque de fer solidement fixée à la base du cylindre avec des vis de fer. Pour presser la liqueur renfermée dans le cylindre, on suspendait des poids aux bras d'un levier attaché à la tige du piston.

Le volume de chacune des liqueurs que les auteurs soumirent à l'expérience, était de $26\frac{3}{4}$ pouces cubes rhénains; et ils trouvèrent que sous une

pression. . . . de $3484\frac{3}{4}$ hect. . . de $11735\frac{17}{20}$ hect
il diminuait pour

l'eau de fontaine	de $\frac{1}{142,66}$	de $\frac{1}{35,667}$
l'eau saturée de sel marin. . . .	de $\frac{1}{103,45}$	de $\frac{1}{33,909}$
le lait.	de $\frac{1}{215,21}$	de $\frac{1}{3\text{[illegible]},695}$
l'eau-de-vie . . .	de $\frac{1}{224,76}$	de $\frac{1}{45,664}$

Les auteurs observèrent, comme *Canton* qu'aussitôt que les liqueurs cessaient d'êtr pressées, elles revenaient à leur premier vo lume de $26\frac{3}{4}$ pouces cubes.

Il reste encore, sans doute, une grand incertitude sur les véritables quantités don les liqueurs ont été comprimées dans ces ex périences : cependant, réunies à celles d Canton, *ces expériences ne permettent guère*

de douter que les liqueurs ne soient sensiblement compressibles et élastiques.

52. Mais, 1.°, *les volumes des liqueurs ne sont pas réciproques aux pressions qu'elles éprouvent.* C'est ce qui résulte des expériences de MM. *Abich* et *Zimmermann*, comparées soit entre elles, soit avec celles de Canton. Pour établir ces comparaisons, on observera que la pression de l'atmosphère sur le piston de la machine ci-dessus est de 37 hectogrammes, lorsque la hauteur du baromètre est de 75 centimètres.

2.° Il suit de là que l'*élasticité des liqueurs n'est pas proportionnelle à leur densité.*

3.° Par conséquent *les différentes liqueurs se dilatent inégalement par les mêmes degrés de chaleur.* Cette conclusion est confirmée par des expériences directes; car on sait que, par des degrés de température donnés et compris entre certaines limites, l'esprit de vin est plus dilatable que l'huile de lin, l'huile de lin plus que l'eau, et l'eau plus que le mercure.

4.° *Les molécules des liqueurs ont donc entre elles une cohésion sensible.* Car les molécules des différentes liqueurs, dans les mêmes circonstances, résistent inégalement, et par conséquent résistent, à l'action du

calorique qui tend à les écarter les unes des autres. Or cette résistance ne peut venir que de la cohérence ou de l'attraction mutuelle de ces molécules. Ces molécules exercent donc les unes sur les autres une attraction réelle. C'est en vertu de la prépondérance de cette même attraction sur la force expansive du calorique, que les liqueurs se congèlent ou se solidifient.

La cohésion mutuelle des molécules de l'eau devient très-sensible par la forme de sphéroïde que prend une goutte suspendue, et qu'elle garde jusqu'à ce que, devenue trop considérable, elle s'allonge et se divise en deux. Elle est encore visiblement indiquée par la figure sphérique qu'affecte une goutte d'eau placée sur une surface qu'elle ne mouille pas, et par la prompte réunion de deux de ces gouttes, aussitôt qu'elles viennent à se toucher sur une surface de cette nature. Tout le monde sait aussi que, pour enlever un carreau de verre de la surface d'une eau stagnante, il ne suffit pas d'employer une force égale au poids de ce carreau et des gouttes d'eau qu'il détache de la masse ; il faut encore vaincre la résistance provenant de l'adhérence de ce carreau et de ces gouttes avec les molécules voisines.

53. *Quelque grande* cependant *qu'on imagine la cohésion ou l'attraction mutuelle des molécules des liqueurs, ces molécules doivent céder à la plus petite pression, qui ne tend pas à diminuer la quantité de leur contact réciproque;* ou, ce qui revient au même, *cette cohésion ne doit être sensible qu'à la surface de la masse liquide* : car dans l'intérieur, chaque molécule est également environnée de toute part par d'autres molécules, qui n'agissent qu'à de très-petites distances. Elle n'en reçoit donc que des impressions égales entre elles et directement opposées, et qui par conséquent se détruisent mutuellement, sans produire aucun effet sensible.

Ce raisonnement paraît confirmé par l'expérience : car c'est un fait, ou du moins tout le monde regarde comme un fait, que si l'on verse de l'eau dans une des deux branches d'un siphon, elle finit par se mettre de niveau dans les deux, c'est-à-dire, ses deux surfaces supérieures se rangent enfin dans un même plan horizontal, quelle que soit la longueur de ces branches. Or si l'action mutuelle des molécules ne se détruisait pas entièrement, ou si dans leurs mouvemens respectifs ces molécules éprouvaient entre elles la moindre adhérence ou le moindre

frottement, il y aurait une hauteur à laquelle un peu d'eau versée dans une des branches ne suffirait pas pour vaincre cette adhérence ou ce frottement, et pour élever en même temps une masse d'eau qui exercerait la même pression que cette portion d'eau ajoutée. En donnant donc une longueur considérable aux branches du siphon, la différence des niveaux y deviendrait très-sensible : ce qui paraît contraire à l'expérience. Ainsi, dans l'intérieur d'une masse liquide, les molécules peuvent se mouvoir entre elles avec toute la facilité possible, quelle que soit d'ailleurs la liaison ou l'action réciproque de ces molécules, laquelle ne peut être sensible qu'à la surface, ou lorsqu'il y a tendance à la solution de continuité dans la masse.

Il paraît même que l'action attractive du tuyau où l'eau s'écoule, s'arrête à la couche très-mince qui en tapisse la paroi; car on a cru remarquer que la diversité des matières des tuyaux ne fait pas varier sensiblement la résistance. Si l'on regarde donc cette couche fluide comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement, il semble que l'action mutuelle des molécules de cette masse est incapable d'al-

térer les mouvemens que leur imprime la pesanteur, et qu'il faut chercher ailleurs la cause des retards qu'on observe dans ces mouvemens.

54. *Solidité.* En mécanique on appelle *solide*, et en chimie, *concret*, *tout corps dont les molécules ne peuvent pas être déterminées par la plus petite force à glisser les unes sur les autres.* Ainsi les corps solides résistent non-seulement à la diminution du contact mutuel de leurs parties, mais même à tout changement dans les positions respectives de ces parties.

C'est une opinion assez généralement répandue, que les solides ne diffèrent des fluides que parce qu'ils opposent une plus grande résistance à la séparation de leurs parties : mais il paraît, d'après le numéro précédent, que ce n'est pas dans le degré de la résistance à la séparation des parties, mais dans celui de la résistance qu'elles éprouvent en glissant les unes sur les autres, que consiste cette différence ; et que cette dernière résistance est nulle dans les fluides, quelque grande qu'on veuille supposer la première. Il semble donc que la cohésion ou l'attraction mutuelle des parties ne constitue pas seule la solidité des corps, et que le vrai

principe métaphysique de cette solidité nous est encore inconnu.

Nous devons faire observer que l'on confond quelquefois le mot *solidité* avec le mot *impénétrabilité*, et même avec le mot *fermeté* ou *ténacité*.

55. Un corps solide, dont les parties peuvent glisser les unes sur les autres, sans se désunir ou se rompre, est *ductile* : tels sont l'or, l'argent, le cuivre, le fer, etc., qu'on peut forger, laminer et filer.

Le corps *fragile* est celui dont les parties ne peuvent glisser les unes sur les autres, sans se rompre : ainsi le verre, la porcelaine, etc., sont fragiles. Si une très-petite force suffit pour le réduire en menus morceaux, il est *friable* : le sucre est assez souvent dans ce cas.

Si au contraire il faut une force assez considérable pour rompre un corps, on dit qu'il est *ferme* ou *tenace*, suivant que cette force tend directement à en rapprocher ou à en écarter les parties : ainsi la poutre qui soutient un édifice, est ferme; celle qui soutient un plancher ou un poids suspendu, est tenace.

On appelle *dur*, ou bien un corps qui oppose une grande résistance à la percussion

ou à la pression qui tend à le rompre ou à changer sa figure, ou bien un corps qui ne s'use que difficilement par le frottement d'un autre corps. Dans la première acception, le mot *dur* a encore deux significations ; car il est l'opposé de *mou* et de *fragile :* dans la seconde, il l'est de *tendre.*

L'expression *corps mou* est aussi susceptible au moins de deux sens différens : car, d'un côté, elle désigne un corps dont on peut aisément changer la position respective des parties, sans détruire leur liaison ; tels sont le beurre en été, la pâte de froment, etc. : et, d'un autre côté, elle signifie un corps incompressible ou compressible, mais sans élasticité sensible, quoique sa figure puisse changer ; tels sont la pâte d'argile, le plomb, etc.

PROLÉGOMÈNES
DE MÉCANIQUE.

56. La Mécanique *est la science de l'équilibre des forces, et des mouvemens qu'elles produisent.*

Elle se divise donc en deux parties. Le but de l'une est de trouver les rapports que les forces doivent avoir en intensités et en directions, pour se faire équilibre : on la nomme *statique*. L'autre a pour objet de déterminer les mouvemens que produisent des forces données, et réciproquement, de déterminer les forces qui produisent des mouvemens connus : on l'appelle *dynamique*.

Chacune de ces parties se divise elle-même en deux autres, selon que les corps auxquels on suppose les forces appliquées, sont solides ou fluides. La partie de la statique qui ne traite que de l'équilibre des forces appliquées à des corps solides, retient le nom de *statique*; c'est la *statique proprement dite* : et l'on donne le nom d'*hydrostatique* à celle dont l'objet est la détermination de l'équilibre des forces appliquées aux molécules d'une masse fluide.

Pour la même raison, la dynamique se soudivise en *dynamique proprement dite*, et en *hydrodynamique*.

57. Les substances matérielles ne pouvant produire aucun effet que par des forces et du mouvement, on doit regarder la mécanique comme la première et la plus importante des branches de la physique. Tous les phénomènes de la nature sont, en quelque sorte, de son domaine; et c'est à elle que les arts manuels doivent leur naissance ou leur perfectionnement. Ainsi, pour approfondir la science de la nature, et l'appliquer d'une manière sûre aux besoins et à l'agrément de la société, il est indispensablement nécessaire de se familiariser avec les différentes parties de la mécanique. Nous allons en exposer les premières notions et les principes fondamentaux.

CHAPITRE I.er

Généralités sur le mouvement.

§. I.er *Notions du temps, du lieu et de la position d'un corps.*

58. Les idées de l'espace et du temps sont comme la base de celle que nous nous formons

du mouvement. Nous avons déjà exposé celle que nous avons de l'espace (27). Voici celle que nous avons du temps.

Nous nous représentons le *temps comme une grandeur infinie, d'une seule dimension, nécessaire, continue, qui n'a que des parties aussi continues, successives, divisibles à l'infini, inséparables, intrinsèquement semblables entre elles, incapables d'affecter nos organes,* et propres à déterminer la simultanéité et la succession des objets, comme l'espace l'est à déterminer leurs positions.

1.° Le temps est *infini* en ce sens, que nous ne pouvons nous représenter aucun temps défini, sans le concevoir terminé par deux autres temps : 2.° d'*une seule dimension ;* le temps n'est que long, et il peut toujours être représenté par une ligne : 3.° *nécessaire;* car nous pouvons bien, par la pensée, anéantir tous les phénomènes qui existent dans le temps, mais non le temps lui-même : 4.° etc.

Qu'est-ce donc que le temps en lui-même? Est-ce quelque chose de réel, indépendamment des objets qui y existent? Est-ce une modification de ces objets mêmes? Ou n'est-il que le produit de la faculté que nous avons de faire des abstractions? N'est-ce pas même, comme le prétendent les *Kantiens*,

une propriété essentielle de notre esprit, une condition purement subjective, et sans laquelle nous ne pourrions rien connaître?... Mais c'est à la métaphysique à définir la nature du temps, ainsi que celle de l'espace.

59. Le temps, tel que nous venons de le décrire, et par conséquent considéré sans aucun rapport à des objets existans, est ce que les anciens métaphysiciens appelaient le temps *absolu*, *abstrait*, *idéal*, *mathématique*, que Newton nommait le *temps vrai*, et que les criticiens appellent le *temps pur*.

Le temps où les choses existent, ou dans lequel on conçoit qu'elles existent, est ordinairement appelé *temps relatif*. Les Kantiens lui donnent le nom de *temps empirique*.

L'idée que nous nous formons du temps relatif, semble présupposer en nous celle du temps absolu : car on ne peut pas juger de la simultanéité ou de la succession de l'existence des objets, sans connaître un terme de comparaison auquel on puisse rapporter le temps de ces diverses existences. Mais il paraît difficile de trouver ce terme de comparaison ailleurs que dans l'idée même que nous avons tous du temps absolu. Et, sans cette idée, verrions-nous bien intuitivement la nécessité et la généralité de cet axiome :

« Différentes parties du temps ne peuvent pas « exister à la fois ? » Il semble donc que, quand on dit que le temps est la trace laissée dans la mémoire par l'observation successive de plusieurs effets, il ne faille entendre par là que le souvenir d'une suite de temps relatifs.

60. L'espace se divise aussi en *absolu* et en *relatif*. L'espace *absolu* est indépendant de l'existence des objets qu'on y peut concevoir, et est aussi appelé *immatériel*, *immobile*, *abstrait*, *pur* : c'est celui que nous avons décrit au n.° 27.

L'espace *relatif* est occupé, ou supposé occupé par des corps ; et par cette raison on le nomme aussi quelquefois espace *matériel*, *mobile*, *concret*, *empirique*.

61. On appelle ordinairement lieu *d'un corps*, *la partie de l'espace qu'il occupe*. Mais cette définition ne répond pas exactement à l'idée qu'on attache souvent au mot *lieu* : car quand on demande la distance entre deux corps, par exemple, entre la terre et le soleil, on veut connaître la longueur de la ligne droite qui joint les centres de ces deux globes, et non la distance entre deux points quelconques, pris sur leurs surfaces ou dans leur intérieur. D'où il suit que par

le *lieu d'un corps* on n'entend souvent qu'*un point déterminé de l'espace qu'occupe ce même corps.*

Le *lieu* d'un corps est *absolu* ou *relatif*, selon qu'il fait partie de l'espace absolu ou de l'espace relatif.

62. La position d'un corps est le rapport extérieur qu'a ce corps avec l'espace absolu ou avec l'espace relatif, suivant que cette position est *absolue* ou *relative*.

Nous dirons que la position d'un corps; par rapport à un système de points ou de corps, est *durable*, lorsque ce corps et ce système, abandonnés à leur état actuel, conserveraient toujours cette même position respective.

63. Quand plusieurs points ou corps sont liés entre eux d'une manière invariable, ou bien, que l'on considère leur ensemble comme ne faisant qu'un seul et même corps, on donne ordinairement à cet ensemble le nom de *système*.

On dit qu'un système est *libre*, quand il ne tient à aucun point fixe, ou qu'aucune de ses parties, quelles que soient d'ailleurs leur liaison et leur disposition mutuelles, n'est assujettie à aucun obstacle étranger au système.

§. II. *Notions du repos et du mouvement.*

64. Les géomètres déterminent ordinairement la position d'un système de corps ou de points, en les rapportant à trois plans rectangulaires entre eux, et qu'ils regardent comme fixes dans l'espace. « On abaisse de « chacun des points du système des per- « pendiculaires sur les plans fixes : la lon- « gueur de ces perpendiculaires et le sens « dans lequel on doit les compter, détermi- « nent la position relative de ces points.

« On nomme *coordonnées* d'un point les « perpendiculaires abaissées de ce point sur « les plans fixes rectangulaires ; ces plans se « nomment *plans des coordonnées*, et les « trois droites suivant lesquelles ils se cou- « pent, *axes des coordonnées. L'origine des* « *coordonnées* est le sommet de la pyramide « triangulaire formée par les trois plans « coordonnés.

« On désigne ordinairement les coordon- « nées d'un point par les lettres x, y, z : on « nomme *axe* des *x*, celui qui est parallèle « à la coordonnée *x*; *axe* des *y*, celui qui « est parallèle à la coordonnée *y*; et *axe* « des *z*, celui qui est parallèle à la coor- « donnée *z*. On distingue chacun des plans

« rectangulaires par les deux axes qu'ils con-
« tiennent : ainsi le plan des x, y, est celui
« qui contient l'axe des x et celui des y ; le
« plan des y, z, est celui qui contient l'axe
« des y et celui des z.

« Les trois plans des coordonnées divisent
« l'espace en huit portions ; on indique celle
« où un point est situé, par les signes qui
« précèdent les valeurs absolues des coor-
« données de ce point. Les quantités x, y,
« z, correspondent aux huit points, dont les
« ordonnées sont :

$+x+y+z$; $+x+y-z$; $+x-y+z$; $-x+y+z$;
$-x-y+z$; $+x-y-z$; $-x+y-z$; $-x-y-z$.

(MM. *Monge* et *Hachette*, *des Surfaces du* 1.er *et du* 2.e *degré.*)

Tant que ces coordonnées conservent et leurs valeurs absolues et leurs signes, il est évident qu'elles ne peuvent appartenir qu'à un seul et même point, et qu'ainsi la position de ce point par rapport aux plans des coordonnées est invariable.

65. Concevons donc qu'un point donné ait une position durable par rapport à trois plans rectangulaires entre eux, et passant par un espace ou par un système donné, on dira que le point donné est en *repos* par rapport à cet espace ou à ce système. En général,

Le repos d'*un corps*, ou d'un système de corps ou de points, *est l'existence durable de ce corps ou de ce système, dans la même position par rapport à un espace ou à un système quelconque*; ou, ce qui revient au même, *la présence durable de toutes les parties qui le composent, dans leurs places respectives.*

Il ne faut pas confondre, comme on le fait ici quelquefois, la position *durable* d'un corps, avec sa position *constante, permanente.* Si on lance verticalement de bas en haut un boulet de canon; au point le plus haut de la droite qu'il aura décrite, il sera dans une position durable, en *repos*, par rapport au globe de la terre : mais il n'y sera qu'un instant; de nouvelles impressions de la pesanteur le forceront de descendre, et il changera continuellement de position par rapport à la terre, jusqu'à ce qu'il soit retombé sur sa surface, c'est-à-dire, il se *mouvra*, par rapport à la terre.

66. Le mouvement d'*un corps est donc le changement de sa position par rapport à un espace quelconque*; ou, ce qui est la même chose, *le changement de ses rapports extérieurs à un espace donné*; ou enfin, *le changement de lieux de tous les points, ou de quelques-uns des points matériels, qui composent*

ce corps. Cette dernière définition est également exacte. Mais il serait inexact de dire, avec beaucoup d'auteurs, que le mouvement en général est le changement de place, ou la translation d'un corps d'un lieu dans un autre, ou enfin l'état d'un corps qui ne demeure pas constamment dans un même lieu: car on dit bien d'une roue de moulin qui tourne sur son axe, qu'elle se *meut*; mais on ne dit pas qu'elle se déplace, ou qu'elle passe d'un lieu dans un autre; son axe, c'est-à-dire la ligne droite autour de laquelle elle tourne, est immobile.

67. On voit par cet exemple, que des différens élémens qui composent un corps, les uns peuvent être en repos, et les autres avoir en même temps des degrés fort différens de mouvement. Pour se mettre donc en état de bien connaître le mouvement d'un corps, il faut commencer par examiner celui d'un point matériel.

Or dans le mouvement d'un point, l'esprit ne voit que le chemin parcouru par ce point, et le temps employé à le parcourir. Ce chemin s'appelle ordinairement *espace*.

§. III. *Différentes espèces de mouvement.*

68. L'espace que parcourt un point dans

son mouvement, est une ligne ou *droite* ou *courbe*. Dans le premier cas, *le mouvement est rectiligne;* dans le second, il est *curviligne.*

69. La direction du mouvement rectiligne est *la ligne droite même que le mobile parcourt dans le sens de son mouvement :* mais dans le mouvement *curviligne*, la direction du mouvement à un point quelconque de la courbe décrite, *est dans la tangente menée à la courbe dans ce point;* car cette tangente peut être considérée comme le prolongement de l'élément de la courbe à ce même point.

70. Dans le mouvement curviligne, la direction est donc différente pour les différens points de la courbe. Cependant on dit, dans un autre sens, qu'un mobile, en décrivant une courbe même fermée, telle que le cercle, l'ellipse, etc., se meut toujours dans la même direction, ou du moins dans le même sens, vers le même côté : c'est ainsi que la lune, en décrivant son orbe autour de la terre, se meut toujours d'occident en orient. Cette espèce de direction pourrait s'appeler la *direction angulaire* du mouvement, puisqu'elle indique le sens dans lequel on compte les angles décrits autour d'un centre.

Mais qu'est-ce que ce sens, dans lequel un

corps se meut ? ce côté, vers lequel il tend ? En quoi consiste la différence intrinsèque de deux mouvemens, ou rectilignes, ou curvilignes, parfaitement égaux entre eux, si ce n'est que l'un est dirigé dans un sens, et l'autre dans le sens opposé ? Le géomètre voit intuitivement cette différence : mais le métaphysicien ne réussit pas plus à l'éclaircir et à la ramener à des caractères généraux, qu'à expliquer clairement ce qui constitue la différence intrinsèque des corps que M. *Le Gendre* appelle *égaux par symétrie*, ou de deux spirales, par exemple, de deux tiges de houblon, dont l'une est contournée de l'est à l'ouest et l'autre de l'ouest à l'est, mais qui peuvent être d'ailleurs parfaitement égales entre elles.

71. *Le mouvement* est UNIFORME, lorsque le *mobile parcourt des espaces égaux en temps égaux ;* et l'on appelle VARIÉ tout mouvement qui n'est pas uniforme, c'est-à-dire, *tout mouvement par lequel le mobile parcourt des espaces inégaux en temps égaux, ou des espaces égaux en temps inégaux,* quelque petites que soient d'ailleurs les parties auxquelles on suppose l'espace et le temps divisés.

Ainsi, dans le mouvement varié, le rapport

de l'espace au temps change sans cesse; dans le mouvement uniforme, il demeure constamment le même.

72. C'est, dans le mouvement uniforme, *ce rapport constant des espaces parcourus aux temps employés à les parcourir*, qu'on appelle VITESSE. La constance de la vitesse distingue les mouvemens uniformes des mouvemens variés, et sa grandeur distingue les mouvemens uniformes les uns des autres.

Malgré l'hétérogénéité de l'espace et du temps, on ne sera pas surpris de les voir mis ici en rapport, si l'on se rappelle que le temps (58) peut, comme l'espace, être représenté par une ligne. D'ailleurs on peut rapporter l'un et l'autre à des unités déterminées de leurs espèces : par exemple, on peut prendre le mètre linéaire pour l'unité des espaces, et la seconde, pour l'unité des temps ; alors tous les espaces et tous les temps pourront être traités comme de purs rapports au mètre et à la seconde, et s'exprimer par des nombres abstraits, et seront ainsi susceptibles d'être divisés l'un par l'autre. Les quotiens, pris conformément à la définition ci-dessus, exprimeront les vitesses. Pour l'unité de ces vitesses, il sera naturel de prendre le quotient qui se réduit à l'unité,

ou plutôt, la vitesse du mobile qui, dans l'unité des temps, parcourrait d'un mouvement uniforme l'unité des espaces.

73. Si l'on désigne par e l'espace qu'un mobile quelconque décrit d'un mouvement uniforme pendant le temps t, et par v, la vitesse de ce mobile; on aura, par la définition (70),

$$[1]\ldots v=\frac{e}{t}\ldots[2]\ldots e=vt\ldots[3]\ldots t=\frac{e}{v}.$$

C'est-à-dire, dans tout mouvement uniforme, 1.° *la vitesse est égale à l'espace divisé par le temps;* 2.° *l'espace est égal au produit de la vitesse par le temps;* 3.° *le temps est égal au quotient de l'espace divisé par la vitesse.*

74. Il est aisé de sentir que ces mesures sont déduites d'idées trés-familières à tout le monde : car si deux points matériels A, M
Fig.5. (*fig.* 5) parcourent dans le même temps, d'un mouvement uniforme, les espaces AB, $a\,b$, et que AB soit double, triple, etc., de $a\,b$; tout le monde dit que la vitesse de A est double, triple, etc., de celle de M. Donc,

1.° Dans les mouvemens uniformes, *les vitesses sont entre elles, comme les espaces parcourus dans le même temps.*

Pareillement, si $AB=ab$, mais que AB soit parcouru dans un temps deux fois, trois

fois, etc., plus court que celui employé à parcourir $a\,b$; on dit encore que la vitesse de A est double, triple, etc., de celle de M. Donc aussi,

2.° Dans les mouvemens uniformes, *les vitesses sont réciproquement proportionnelles aux temps employés à parcourir des espaces égaux.*

Conservant donc la signification des lettres e, t, v, donnée dans le numéro précédent, pour le mobile A, et désignant par E, T, V les quantités analogues pour le mobile M; on trouvera, par le raisonnement employé (35),

$$v : V :: \frac{e}{E} : \frac{t}{T}.$$

Ainsi, dans les mouvemens uniformes, *les vitesses sont en raison composée de la raison directe des espaces et de la raison inverse des temps.*

En faisant $V=1$, $E=1$, $T=1$, on en tirera $v=\frac{e}{t}$, comme au numéro précédent.

75. Cette équation, $v=\frac{e}{t}$, fait voir que, lorsque $t=1$, on a aussi $v=e$: ce qui signifie que, dans le mouvement uniforme, *la mesure de la vitesse est l'espace parcouru pendant l'unité de temps.*

Au reste, comme dans le mouvement uniforme les espaces sont proportionnels aux temps (71), il est évident qu'on peut évaluer la vitesse par le rapport d'une partie quelconque de l'espace parcouru, au temps employé à la parcourir.

76. Il n'en est pas de même de la mesure de la vitesse dans le mouvement varié; car ici la vitesse change à chaque instant et d'un point à l'autre de l'espace. Cependant on peut en ramener la mesure à celle de la vitesse dans le mouvement uniforme. En effet, quelque varié que soit le mouvement d'un corps ou d'un point, il est évident qu'à chaque instant et à chaque point de l'espace que parcourt ce mobile, sa vitesse est unique et entièrement déterminée. Il est également clair qu'avec cette vitesse continuée uniformément pendant un temps quelconque, le mobile parcourrait un espace aussi unique, tout déterminé et proportionnel à ce temps. Or c'est le rapport de cet espace au temps employé à le parcourir, qui caractérise la vitesse du mobile à l'instant et au point de l'espace donnés; c'est-à-dire,

Dans tout mouvement varié, la vitesse du mobile à un instant quelconque donné, ou dans un point quelconque déterminé de l'es-

pace qu'il parcourt, est le rapport de l'espace que le mobile (si à cet instant son mouvement devenait uniforme) *parcourrait dans un temps quelconque, à ce temps.*

77. Pour avoir l'expression de cette vitesse à l'instant donné, soit v cette vitesse; e l'espace que le mobile, par son mouvement varié, a parcouru jusqu'à cet instant, pendant le temps t; de l'élément de l'espace qu'il parcourt dans le temps élémentaire dt qui suit immédiatement le temps t: dans le temps infiniment court dt, il ne peut arriver aucune variation dans aucun mouvement, quelque variable qu'on le suppose d'ailleurs. Ainsi, à l'instant donné, la valeur de la vitesse est (73)

$$v = \frac{de}{dt};$$

c'est-à-dire, dans tout mouvement varié, *la vitesse à un instant quelconque est égale au rapport de l'élément du temps à celui de l'espace*, ou *à la limite du rapport entre les variations simultanées de l'espace et du temps.*

78. Le mouvement varié est *accéléré* ou *retardé*, suivant que les espaces croissent dans un rapport plus grand ou plus petit que les temps employés à les parcourir.

Le mouvement est uniformément accéléré,

quand les vitesses croissent comme les temps, ou que la vitesse augmente, en temps égaux, de quantités égales.

Au contraire le mouvement est *uniformément retardé*, quand la vitesse décroît comme les temps augmentent.

79. *L'espace e, qu'un mobile parcourt d'un mouvement uniformément accéléré dans un temps quelconque t, est la moitié de celui qu'avec la vitesse V acquise au bout de ce temps, il parcourrait uniformément dans un temps égal à t;* ou $e = \frac{1}{2} V t$.

En effet, soit divisé le temps t en un très-grand nombre n de parties égales à θ; et concevons pour un instant, que le mobile ne reçoit un accroissement v de vitesse, qu'au commencement ou à la fin de ces petits temps θ. Le mouvement sera évidemment uniforme pendant la durée de chacun de ces temps: ainsi, au commencement des temps θ, 2θ, $3\theta \ldots n\theta = t$, la vitesse du mobile sera (78) v, $2v$, $3v \ldots nv = V$, et l'espace parcouru pendant chacun de ces temps sera (73) ..... $v\theta$, $2v\theta$, $3v\theta \ldots nv\theta = V\theta$. L'espace parcouru dans le temps entier t sera donc la somme des termes de cette dernière progression arithmétique, c'est-à-dire, $\frac{n}{2}(v\theta + V\theta)$;

ou, parce que $n v = V$, et $n\theta = t$, cet espace $=$ $\frac{V\theta + Vt}{2}$.

Comme nous avons supposé qu'au commencement du premier temps θ la vitesse du mobile était v, quoiqu'elle fût réellement nulle; cette valeur est plus grande que l'espace e, ou

$$e < \frac{Vt + V\theta}{2}.$$

Mais si nous avions supposé que l'accroissement de vitesse n'avait lieu qu'à la fin de chaque petit temps θ, l'espace entier aurait été la somme des termes $0, v\theta, 2v\theta, 3v\theta, \ldots\ldots$ $(n-1)\theta$, c'est-à-dire, $\frac{n}{2}(n-1)v\theta = \frac{Vt - V\theta}{2}$.

Dans cette dernière hypothèse, la vitesse supposée est moindre que la vitesse réelle, puisque celle-ci commence à naître avec le premier θ. Par conséquent $e > \frac{Vt - V\theta}{2}$.

Ainsi la vraie valeur de e est comprise entre les deux quantités $\frac{Vt + V\theta}{2}$ et $\frac{Vt - V\theta}{2}$: ces quantités diffèrent d'autant moins entre elles, que θ est plus petit; et elles se confondent quand θ s'évanouit. Or l'on doit supposer cet évanouissement, pour satisfaire à toute la

nature du mouvement uniformément accéléré. Donc enfin $e = \frac{vt}{2}$.

80. Donc, 1.°, $v = \frac{2e}{t}$; ce qui établit un rapport très-simple entre les mesures des vitesses dans les mouvemens uniforme et uniformément accéléré.

2.° *Les espaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré, comptés depuis le commencement de ce mouvement, sont entre eux, comme les carrés des temps, comptés également depuis le commencement du mouvement:* ils sont donc aussi entre eux, *comme les carrés des vitesses acquises à la fin du mouvement.* Ces deux propositions sont une suite évidente de la définition du mouvement uniformément accéléré, et du numéro précédent.

3.° Par conséquent *les espaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré, en temps égaux, croissent comme les nombres impairs* 1, 3, 5, 7, 9, etc.; car ces nombres sont les différences entre les carrés consécutifs 0, 1, 4, 9, 16, 25, etc.

81. Le mouvement d'un corps peut être un mouvement, ou de *rotation*, ou de *translation*, ou composé de ces deux mouvemens.

Le mouvement de rotation proprement dit, ou gyratoire, *est celui par lequel le corps, ou le système de corps ou de points matériels, ne fait que tourner autour d'une ligne droite prise au-dedans de lui-même.* Cette ligne se nomme *axe de rotation.* Nous avons un exemple de cette espèce de mouvement dans une roue de moulin, qui tourne successivemens tous ceux de ses points qui sont hors de son axe, vers les différentes parties de l'espace qui l'environne.

En donnant au mot *lieu* la signification que nous avons exposée à la fin du n.° 61, on peut aussi dire que *la rotation d'un corps est un mouvement par lequel ce corps ne change pas de lieu :* ce lieu doit donc être pris dans l'axe de rotation.

D'après l'une et l'autre de ces définitions, un point matériel n'est pas susceptible d'un mouvement de rotation, puisqu'il ne peut ni tourner sur lui-même, ni se mouvoir sans changer de place.

82. Il suit de ces définitions, qu'*en vertu du seul mouvement de rotation d'un corps, ou d'un système quelconque,*

1.° *Aucun point de l'axe ne se meut.*

2.° *Tous les autres points du système décrivent, dans le même instant, des arcs cir-*

culaires et semblables, dont les rayons sont les distances respectives de ces points à l'axe.

3.° *Les vitesses des différens points du système sont donc proportionnelles aux distances respectives de ces points à l'axe;* car elles sont entre elles comme les espaces élémentaires décrits dans le même temps (77). Or ici ces espaces sont des arcs circulaires et semblables, et par conséquent proportionnels aux rayons, qui sont les distances respectives des divers points du système à l'axe de rotation.

4.° *Donc si l'on connaît, pour instant quelconque, la vitesse d'un seul des points du système donné, on pourra assigner, pour le même instant, les vitesses de tous ses autres points.*

5.° *Les divers points du système, supposés invariablement liés entre eux, décrivent dans le même temps des angles égaux, autour de l'axe de rotation :* car ils décrivent, dans les mêmes instans, des arcs circulaires et semblables.

83. *Le rapport de l'élément de l'angle* qu'un point quelconque du système décrit autour de l'axe de rotation, *au temps élémentaire employé à le décrire, est* ce que l'on nomme la VITESSE ANGULAIRE *du système autour de cet axe.*

Si l'on désigne donc par ω l'angle décrit pendant le temps t, et par θ la vitesse angulaire au bout de ce temps, on aura (77)

$$\theta = \frac{d\omega}{dt}.$$

84. Parce que les angles sont mesurés par les arcs d'un cercle dont le rayon est l'unité, on voit que $d\omega$ est l'espace élémentaire parcouru, pendant l'élément dt du temps, par un point du système, dont la distance à l'axe de rotation est exprimée par l'unité. Ainsi on peut dire que *la vitesse angulaire d'un corps mu autour d'un axe, est la même que la vitesse de ceux de ses points dont la distance à l'axe est l'unité.*

85. Soit θ la vitesse angulaire du corps, v la vitesse progressive (72) d'un point quelconque dont r est la distance à l'axe de rotation: on aura (82, 3.°)

$$\frac{r}{1} = \frac{v}{\theta};$$

c'est-à-dire, *le rapport de la vitesse progressive d'un point quelconque du corps, à la vitesse angulaire, est égal au rapport de la distance de ce point à l'axe, à l'unité des distances.*

On ne peut attribuer qu'une vitesse angulaire à un système qui n'a qu'un mouve-

ment de rotation : mais tous ceux de ses points qui sont situés hors de l'axe, ont, outre cette vitesse angulaire commune à tous, des vitesses progressives particulières à chacun, et dont les rapports sont déterminés par l'équation précédente.

86. *Le mouvement de* translation, ou progressif, *d'un système quelconque, est celui par lequel tous les points de ce système sont déplacés à la fois.*

87. D'où il suit, qu'*en vertu du mouvement* purement *progressif d'un système quelconque,*

1.° *Tous les points de ce système se meuvent à chaque instant avec des vitesses égales et suivant des directions parallèles entre elles.*

2.° *Si donc un seul de ces points, supposés invariablement liés entre eux, décrit une ligne droite ou une courbe connue, dans un temps donné; tous les autres points du système décriront chacun, dans le même temps et avec la même vitesse, des lignes parfaitement égales à celle-là, et semblablement disposées dans l'espace.*

3.° *La position d'un seul de ces points dans l'espace étant donc connue pour instant quelconque donné; on pourra trouver, pour le même instant, les positions de tous les autres points rapportés au même espace.*

Il ne faut pas perdre de vue que ces propriétés ne conviennent qu'au mouvement progressif dégagé de tout mouvement gyratoire, comme les propriétés du n.° 82 ne conviennent qu'au pur mouvement de rotation. Il arrive souvent que ces deux espèces de mouvement se réunissent dans le même corps, comme dans les planètes, dans la bille au jeu de billard, dans les roues d'une voiture qui roulent sur le terrain, etc.; mais il est toujours permis de les considérer séparément.

88. Le mouvement est *absolu* ou *relatif*, suivant que l'espace auquel on le rapporte, est lui-même absolu ou relatif. Ainsi

Le mouvement absolu *d'un point matériel, ou d'un système quelconque, est le changement de ses rapports extérieurs à l'espace absolu.* On ne lui donne donc le nom d'*absolu* que parce qu'on le rapporte à l'espace absolu, et non parce qu'il conviendrait au corps pris isolément et sans aucun rapport à aucun autre objet; car l'idée d'un pareil mouvement serait contradictoire.

Le mouvement relatif *est le changement des rapports extérieurs du mobile à l'espace relatif*; ou, si l'on veut, *le changement de la position du mobile par rapport à un corps ou à plusieurs corps environnans.*

Il est facile de définir, d'une manière analogue, le *repos absolu* et le *repos relatif*.

Il est également aisé de voir que le même corps peut être à la fois en repos et en mouvement, si l'on rapporte sa position à différens espaces. C'est ainsi qu'une personne assise dans un vaisseau à la voile, est en repos par rapport au vaisseau, et en mouvement par rapport au rivage.

89. De ce que l'espace absolu ne peut pas tomber sous nos sens extérieurs (27), il suit évidemment,

1.° *Que ni le mouvement absolu, ni le repos absolu, ne peuvent être pour nous des objets d'expérience ou d'observation* (10).

2.° *Donc les mouvemens et le repos des corps, en tant qu'ils peuvent être pour nous des objets d'expérience ou d'observation, ne sont que purement relatifs.*

3.° Cependant, parce que tous les espaces relatifs, ou tous les corps auxquels on rapporte le mouvement d'un corps, sont mobiles comme lui, et qu'ils ne peuvent ni exister ni se mouvoir que dans un espace, *il est de toute nécessité qu'il y ait ou qu'on imagine un espace absolu et immobile*, auquel on puisse rapporter par la pensée, en dernier résultat, la position de tous les corps.

L'exemple suivant fera peut-être mieux sentir cette nécessité. Sur un vaisseau qui vogue en pleine mer, les matelots, en allant de la proue à la pouppe, se meuvent relativement à ses différentes parties; « le vaisseau se meut sur la surface de la mer, qui « tourne autour de l'axe de la terre, dont le « centre se meut autour du soleil, qui lui-« même est emporté dans l'espace avec la « terre et les planètes. » Les systèmes planétaires répandus dans cet espace peuvent encore se mouvoir dans un espace plus étendu, et ainsi de suite à l'infini. Pour concevoir donc un terme à ces mouvemens, et un lieu où ils puissent se passer, nous sommes forcés d'imaginer un espace sans bornes, immatériel et pénétrable à la matière; et c'est cet espace, idéal ou réel, que nous nommons *absolu* (60). (*Exposition du système du monde, liv.* 3, *chap.* 1.)

§. IV. *Composition et décomposition des mouvemens.*

90. Fondement de la composition des mouvemens. *Tout mouvement rectiligne, comme tel et comme objet d'une observation ou d'une expérience possible, peut être indifféremment*

regardé comme le mouvement du corps dans un espace en repos, ou comme le mouvement de cet espace transporté avec la même vitesse dans une direction opposée, tandis que le corps reste en repos.

Fig. 4. En effet, soit *A C H B F D* (*fig.* 4.) une section plane de l'espace relatif, par exemple, une coupe horizontale d'un vaisseau, sur laquelle on ait placé un globe en *G*; et concevons qu'en vertu d'une vitesse donnée suivant la droite *A B*, le lieu *G* du globe devienne *E*. Ce changement de lieu peut arriver de deux manières : car, 1.°, le globe peut être transporté avec la vitesse donnée de *G* en *E*, le vaisseau demeurant immobile par rapport au rivage *MN*; 2.°, le globe restant immobile relativement au rivage, le vaisseau peut se mouvoir avec la vitesse donnée, mais dans la direction opposée *A b*, et venir en *a c h b f d*, de sorte que le point *G* soit transporté en *g*, et le point *E* en *G*. Or les droites *E G* et *G g* étant des parties égales de la même ligne, et la vitesse étant d'ailleurs supposée la même dans ces deux manières de se représenter le mouvement, il est visible qu'à chaque instant la position du globe, par rapport au vaisseau, sera aussi la même dans les deux cas.

On voit qu'on peut raisonner de la même manière, de tout autre mouvement rectiligne, pourvu qu'il ne soit que relatif. Or les mouvemens relatifs sont les seuls que nous puissions observer ou mettre en expérience (89, 2.°). Donc, etc. [1]

---

1. *Il est donc impossible de distinguer le mouvement vrai d'un corps, de son mouvement apparent, par les seuls changemens de ses relations extérieures aux corps environnans.* Pour les mouvemens rectilignes, cette conséquence est claire par ce que nous venons de dire dans le texte : elle est également applicable aux mouvemens curvilignes ; car les changemens des relations extérieures seront les mêmes, soit que le mobile que l'on considère, décrive sa courbe pendant que les objets environnans sont en repos dans l'espace absolu, soit que, le mobile étant en repos, les corps environnans décrivent, en sens contraires et dans le même temps, des courbes semblables à la trajectoire qu'on pourrait attribuer au mobile.

Il ne faut cependant pas en conclure l'impossibilité absolue de distinguer les mouvemens vrais des mouvemens qui ne sont qu'apparens ; car on peut y parvenir par la considération de leurs causes et de leurs effets. La rotation de la terre, prouvée par la déviation des corps qui tombent de grandes hauteurs, nous en fournit un exemple très-remarquable, que nous allons exposer d'après un de nos savans les plus distingués. « Pour concevoir ce phénomène (*la déviation*), imagi-
« nons un corps pesant, placé à une grande distance de la
« surface terrestre, par exemple, au sommet d'une tour. Si la
« terre est immobile, le corps tombera au pied de la tour,
« suivant la verticale ; mais si la terre tourne sur elle-même,
« le corps qui participe à ce mouvement, aura une vitesse de

91. Cette considération nous fournit le moyen de voir clairement, non-seulement qu'un seul et même point matériel peut avoir plusieurs mouvemens rectilignes à la fois, dans le même sens ou en sens opposés, mais encore que tous ces mouvemens se réduisent à un seul, qui est la même chose que leur somme ou leur différence. En effet, *AB*
Fig. 5. et *a b* (*fig.* 5) étant les espaces que le même point matériel *M* parcourrait, dans l'unité de

---

« rotation plus grande que le bas de la tour, parce qu'il est « plus éloigné de l'axe. Ainsi, lorsqu'il tombera avec le mou- « vement composé de cette vitesse et de la pesanteur, il de- « vra devancer un peu la verticale dans le sens du mouve- « ment de la terre, et par conséquent, après sa chute, il sera « un peu écarté de la tour vers l'orient : c'est ce que l'expé- « rience confirme » (M. *Biot, Traité élém. d'astron. phys.* p. 117). M. *Guglielmini*, en faisant tomber des corps pesans d'une hauteur de 241 pieds, a trouvé une déviation de 8 lignes vers l'est; et M. Henrenberg, à Hambourg, a trouvé une déviation de 4 lignes pour une chute d'une hauteur de 235 pieds (*ibid.* p. 166).

On voit qu'on parviendrait ainsi à déterminer la rotation de la terre, quand il n'y aurait aucun objet *extérieur* auquel on pût rapporter la position de notre globe. Cependant il ne faut pas confondre ce mouvement, quoique vrai, avec le mouvement absolu (88); car ce n'est pas à l'espace absolu qu'on le rapporte, mais bien à l'axe de la terre.

Il sera très-bon de lire, sur l'objet de cette remarque, la scholie que *Newton* a mise à la suite des définitions qui sont à la tête de ses *Princip. math. de la phil. nat.*

temps, suivant la même direction AC; concevons que ce point M est transporté dans l'espace absolu avec une vitesse représentée en grandeur et en direction par AB; mais à la place de son mouvement avec la vitesse ab, substituons celui de l'espace relatif, en imaginant que cet espace se meut dans le même temps avec la même vitesse $ab = CB$, dirigée en sens contraire : ce dernier mouvement est exactement le même que si le point M était mu avec la vitesse et dans la direction $BC = ab$ (90). Or il est évident que le point M, en vertu de son propre mouvement dans l'espace absolu avec la vitesse et suivant la direction AB, et du mouvement de l'espace relatif avec la vitesse et suivant la direction CB, se trouvera, à la fin de l'unité de temps, au point C de l'espace relatif. Donc le point M, en vertu de ses deux mouvemens, parcourt, dans l'unité de temps, la somme des espaces $AB + BC = AB + ab$, qu'il parcourrait séparément par ces deux mouvemens dans la même unité de temps. Sa vitesse est donc (75) la somme de ces deux vitesses.

Si l'on supposait au point M un troisième mouvement dans le même sens et représenté par cd, on pourrait, au lieu des deux vitesses

AB et ab, substituer la vitesse unique $AC = AB + ab$; ensuite les deux mouvemens AC, cd se réduiraient à un seul $AD = AC + cd = AB + ab + cd$, comme on vient de le voir, etc. Donc, en général,

Un point matériel, en vertu d'un nombre quelconque de mouvemens simultanés, et dirigés dans le même sens et suivant la même droite, parcourt dans cette même direction un espace égal à la somme de ceux qu'il parcourrait dans le même temps en vertu de chacun d'eux séparément; ou, ce qui revient au même, *la vitesse unique d'un point matériel, résultante de différentes vitesses quelconques simultanées et dirigées suivant la même droite et dans le même sens, est égale à la somme de toutes ces vitesses.*

92. Concevons maintenant que le point matériel M est transporté dans l'espace absolu avec une vitesse représentée en grandeur
Fig. 5. et en direction par la droite EB (*fig.* 5), et qu'en même temps l'espace relatif se meut dans cette même direction et avec cette même vitesse EB : il est clair que le point M conservera sa même position, ou restera en repos (65), par rapport a cet espace relatif. Or, quant à la position réciproque du point M et de l'espace, il est indifférent que cet espace se

meuve avec la vitesse et dans la direction *EB*, ou que le point *M* soit transporté dans cet espace avec une vitesse *BE*, égale, mais directement opposée (90). On voit donc qu'un point matériel, en vertu de deux mouvemens égaux en quantité, mais diamétralement opposés en direction, doit rester en repos.

93. Si l'on suppose au point *M* deux vitesses simultanées, directement opposées et inégales, et représentées par *AB*, *ba* (*fig.* 5); au lieu *Fig.* 5. de la vitesse *AB*, on substituera la somme de deux autres $AE + EB$, dont l'une $EB = ab$. En vertu des deux mouvemens *EB*, *ba*, le point *M* est en repos, comme nous venons de le voir. Il ne se meut donc qu'avec la différence numérique des vitesses données $AB - ab = AE$; et ce mouvement a lieu dans le sens de la plus grande de ces vitesses.

Or, d'après le n.° 91, les mouvemens *AB*, *ba* peuvent être chacun la somme de tant de mouvemens qu'on voudra, dirigés, les uns dans le sens *AB*, et les autres dans le sens opposé *DA*. Donc,

En vertu de tant de mouvemens simultanés qu'on voudra, dirigés tous suivant la même droite, mais les uns dans un sens et les autres dans le sens opposé; un point matériel se

meut avec une vitesse qui est la différence entre la somme des vitesses dirigées dans un sens, et la somme des vitesses dirigées dans le sens opposé; et ce mouvement se fait dans le sens de ceux dont la somme est la plus grande.

.94. Cherchons enfin comment deux vitesses, représentées en grandeurs et en directions
Fig. 6. par les droites AB, AC (*fig.* 6), qui concourent au même point A sous un angle quelconque BAC, peuvent appartenir à la fois au même point matériel M, et quel mouvement unique en résulte pour ce mobile.

Ayant construit le parallélogramme $ABCD$, et mené la diagonale AD, partageons la droite AC en un nombre quelconque de parties égales entre elles, par exemple, en trois AE, EF, FC; et menons Eg, Fh, et gG, hH, respectivement parallèles aux droites AB et AC. Les triangles AEg et AGg, AFh et AHh, sont respectivement égaux entre eux et semblables au grand triangle ACD; par conséquent $AG = GH = HB$. Prolongeant DC jusqu'en c, de sorte que Cc soit $= DC$, menons la droite Ac, et prolongeons gE, hF, jusqu'à la rencontre de cette droite en e, f. A cause de la similitude des triangles AEe, AFf, ACc, et de $AE = \frac{1}{3} AC$, on aura $Ee = Eg$, $Ff = Fh$.

Cela posé, représentons-nous le point matériel *M*, d'abord placé en *A*, transporté dans l'espace absolu avec une vitesse représentée en grandeur et en direction par la droite *A C*, qui, en tant qu'elle appartient à l'espace absolu, est immobile : imaginons ensuite que l'espace relatif se meut en même temps uniformément avec la vitesse et dans la direction *B A*. Il est visible que chaque point de cet espace décrira uniformément, dans l'unité de temps, une droite égale et parallèle à *B A*. Ainsi, quand le point matériel *M*, par son mouvement dans l'espace absolu, sera parvenu de *A* en *E*, ce point *E*, en tant qu'il est placé dans l'espace relatif, sera arrivé au point *e* de l'espace absolu, et par conséquent le mobile *M* se trouvera au point *g* de l'espace relatif (90). Pareillement, lorsque le mobile *M*, par son mouvement absolu, arrivera au point *F* de l'espace absolu ; ce point *F*, comme situé dans l'espace relatif, sera venu en *f* dans l'espace absolu. Donc le mobile *M* sera au point *h* de l'espace relatif (90). Enfin le mobile étant parvenu au point *C* de l'espace absolu, ce point *C*, en tant que placé dans l'espace relatif, est transporté au point *c* de l'espace absolu ; et partant le mobile se trouve au point *D* de l'espace relatif. On voit donc

que dans l'espace relatif, le seul qui puisse affecter nos organes, le mobile parcourt d'un mouvement uniforme, pendant l'unité de temps, la diagonale *A D* du parallélogramme *A B C D*. C'est ce qui constitue le principe suivant.

95. Principe de la composition des mouvemens. *En vertu de deux vitesses simultanées, uniformes et représentées en grandeurs et en* Fig. 6. *directions par les droites A B, A C* (fig. 6), *qui comprennent entre elles un angle quelconque B A C, un point matériel A se meut uniformément avec une vitesse unique, représentée en grandeur et en direction par la diagonale A D du parallélogramme construit sur les droites A B, A C, sous l'angle donné B A C.*

Ce principe, qu'*Aristote*[1] connaissait, renferme le fonds des deux numéros précédens et de toute la théorie des mouvemens composés.

96. On peut distinguer deux sortes de *composition des mouvemens* : l'une, qu'on peut appeler *géométrique*, consiste à montrer intuitivement un mouvement unique comme identique avec deux ou plusieurs autres combinés ensemble ; l'autre, qui est *mécanique*,

---

1. *Aristotelis opera*; Basileæ, 1538, pag. 825.

se réduit à trouver un mouvement unique qui puisse remplacer plusieurs autres quant à leurs effets, et ne cherche pas à représenter intuitivement son identité avec eux. Dans les deux cas, le mouvement qui résulte de plusieurs autres, s'appelle mouvement *composé*, *résultant ;* et ceux dont il résulte, se nomment *composans.*

L'opération inverse par laquelle on trouve les mouvemens composans, lorsque l'on connaît le mouvement composé, est la *décomposition du mouvement.*

97. Il n'est pas évident de soi-même, qu'en vertu de deux, trois, etc., vitesses égales entre elles et dirigées suivant la même droite et dans le même sens, un mobile doive parcourir, dans l'unité de temps, un espace double, triple, etc., de celui qu'il parcourrait avec chacune de ces vitesses séparément ; car la vitesse a des degrés, à la vérité, mais elle n'a pas de parties placées les unes hors des autres, comme le sont celles de l'espace et du temps. Il n'est donc pas d'une évidence immédiate, qu'une vitesse donnée soit composée de petites vitesses, comme un espace quelconque est composé de petits espaces. Ainsi la composition des vitesses ne peut pas se faire de la même manière que celle des

espaces. La manière que nous avons exposée, d'après le D.[r] *Kant*, et qui consiste à combiner le mouvement du mobile dans l'espace absolu avec le mouvement opposé de l'espace relatif, paraît la seule manière possible de composer *géométriquement* les mouvemens. On n'y parviendrait pas en général, en ne considérant qu'un seul espace en repos, où se ferait le mouvement du mobile : car un point matériel, ne pouvant aller en même temps par plusieurs chemins considérés dans le même espace, ne peut pas non plus avoir plusieurs mouvemens simultanés et en différens sens, par rapport à cet espace. On conçoit bien qu'il puisse tendre ou être sollicité à se mouvoir en différens sens par rapport à un seul et même espace : mais faire usage de cette considération, ce serait introduire l'idée de force dans la composition des mouvemens, qu'on ne regarde ici que comme des grandeurs; et l'on n'aurait plus qu'une composition mécanique des mouvemens.

98. Par le principe (95) on voit que, *quel que soit le nombre des mouvemens simultanés d'un point matériel, ils se composent tous en un seul, dont il est aisé de déterminer l'intensité et la direction, si l'on connaît celles des mouvemens composans.* Car deux quelconques de

ces mouvemens se composent en un seul (95). Combinant celui-ci avec un troisième, on en trouvera un qui représente les trois que l'on a considérés. Ainsi de suite.

99. Réciproquement *le mouvement d'un point matériel peut se décomposer,*

1.° *en deux autres dont les directions fassent entre elles un angle quelconque donné;*

2.° par conséquent *en un nombre quelconque de mouvemens simultanés, dirigés dans tous les sens qu'on voudra.*

En effet, si du point *A* (*fig.* 7) de la droite *AD*, qui représente la grandeur et la direction de la vitesse donnée, on mène les droites *AB*, *AC*, qui fassent entre elles l'angle donné *BAC*; on pourra former le parallélogramme *ABCD*, dont les côtés *AB*, *AC* représenteront en grandeurs et en directions deux mouvemens qui coïncident avec le mouvement unique *AD*. *Fig.* 7.

100. Si l'intensité de la vitesse et la direction d'un des deux mouvemens composans sont données, l'autre mouvement composant est dès-lors tout déterminé, comme un triangle est entièrement déterminé par un angle et deux côtés donnés en grandeurs et de positions. Mais si la direction d'un des deux composans est seule donnée, on pourra dé-

composer le mouvement *AD* d'une infinité de manières, puisque sur la diagonale *AD* on peut construire une infinité de parallélogrammes qui aient tous un de leurs côtés dans la droite *AB* ou *AC*. Enfin, si l'intensité de la vitesse d'un des deux mouvemens composans est seule donnée, la décomposition du mouvement *AD* pourra être infiniment plus variée, parce que, 1.° en conservant les longueurs *AD*, *AB*, et en variant l'angle *BAC*, on peut former une infinité de parallélogrammes dans le plan *BAD*; 2.° ce plan, en tournant autour de *AD*, comme autour d'une charnière, peut prendre une infinité de positions différentes.

101. Le plus souvent la décomposition doit se faire suivant une direction donnée. Représentant donc l'intensité de la vitesse et la direction du mouvement d'un point matériel
Fig. 7. par la droite *AD* (*fig.* 7), cherchons de quelle quantité le mobile s'avance, dans l'unité de temps, suivant une direction parallèle à *AH*. A cet effet, de l'extrémité *D* j'abaisse la perpendiculaire *DB* sur la droite *AH*, et je dis que *AB* représente la quantité cherchée. Car cette quantité ne peut être ni $AE < AB$, ni $AH > AB$. 1.° Si c'était *AE*, l'autre mouvement composant, représenté par *AF* (99),

pourrait se décomposer en deux autres AC, AG, rectangulaires entre eux, et dont l'un AG serait dirigé suivant la droite AH (99). Donc le mouvement qui compose AD suivant la droite AH, ne peut pas être représenté par AE, mais (91) par $AE+AG=AE+EB=AB$. 2.° Le mouvement cherché ne peut pas être AH. Car l'autre mouvement composant AI pourrait aussi se décomposer en deux autres AC, AK, rectangulaires entre eux, et dont l'un AK aurait lieu dans la droite AH, mais dans un sens opposé. Donc le mouvement, suivant AH, est (93) $AH-AK=AB$. Donc,

Si un point matériel s'avance dans la direction AD avec une vitesse représentée par cette droite; sa vitesse, dans le sens de la droite AH, sera représentée par la partie AB de cette droite comprise entre le premier lieu A du mobile et le pied de la perpendiculaire DB, abaissée de l'autre extrémité D sur cette droite; ou, ce qui est la même chose, *sa vitesse relative à la droite AH est égale à sa vitesse entière AD, multipliée par le cosinus de l'angle BAD compris entre ces deux directions.*

102. En rapprochant ce théorème de ceux des n.os 91 et 93, on voit qu'en général *la vitesse d'un point matériel suivant une droite*

donnée, et résultante de tant de vitesses qu'on voudra, est égale à la somme de ces vitesses partielles, multipliée chacune par le cosinus de l'angle que leurs directions respectives font avec la droite donnée. En faisant cette somme, on pourra regarder toutes les vitesses données comme *positives*, pourvu qu'on ait égard aux signes des cosinus.

Fig. 8. 103. Décomposons la vitesse ah (*fig.* 8) du point matériel a, en deux autres ab, ac, parallèles aux axes rectangulaires AX, AY; et faisons l'angle $hab = \varepsilon$, la vitesse donnée $ah = V$, $ab = u$, $ac = v$. A cause du triangle rectangle abh, nous aurons $ab = ah. \cos. hab$, $ac = ah. \sin. hab$; ou

[1] . . . $u = V. \cos. \varepsilon$ . . . $v = V. \sin. \varepsilon$.

Carrant les membres de ces deux équations, puis les ajoutant, et observant que $\sin.^2 \varepsilon + \cos.^2 \varepsilon = 1$, on aura

[2] . . . $V = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Divisant la seconde des équations [1] par la première, on obtiedra $\frac{v}{u} = \frac{\sin. \varepsilon}{\cos. \varepsilon}$, ou

[3] . . . $\tang. \varepsilon = \frac{v}{u}$.

Enfin, multpliant la première des mêmes équations par $\cos. \varepsilon$, et la seconde par $\sin. \varepsilon$, on trouvera

[4] . . . $V = u \cos. \varepsilon + v \sin. \varepsilon.$

Si l'on connaît donc la grandeur et la direction du mouvement d'un point matériel par rapport à deux axes perpendiculaires entre eux, on connaîtra, par les équations [1], *les deux mouvemens composans parallèles à ces deux axes.*

Réciproquement *deux mouvemens rectangulaires d'un point matériel étant donnés, on trouvera par les équations* [2] et [3] *la grandeur et la direction du mouvement composé.*

L'équation [2], en représentant V comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait u et v pour côtés, exprime (95) que V est le mouvement entier composé de u et de v, ou *le plus grand* mouvement qui puisse résulter de u et de v. Mais la formule [4], prise toute seule, signifie seulement (102) que V est le mouvement composé des rectangulaires u, v, estimés suivant une droite qui fait un angle ε avec l'axe des abscisses, sans exprimer qu'il les épuise en entier, ou que les composans de u, v, suivant une direction perpendiculaire à la droite ci-dessus, se détruiraient complétement.

104. Prenons maintenant les trois axes AX, AY, AZ (*fig.* 9), perpendiculaires entre eux. *Fig.* 9.
Pour fixer les idées, on peut imaginer que

le plan XAY soit celui de la planche placée horizontalement, et que par conséquent l'axe AZ soit vertical. Représentons la grandeur et la direction du mouvement d'un point matériel a, par la droite ae, située comme on voudra dans l'espace. Par ce point a menons les trois droites au, av, aw, parallèles aux trois axes coordonnés, et du point e abaissons la perpendiculaire eh sur le plan uav; puis achevons le rectangle $adeh$. De cette manière, le mouvement ae se décomposera en deux autres ad, ah, dont l'un est parallèle à l'axe AZ, et l'autre est dans le plan uav parallèle à XAY. Enfin du point h menons hb, hc, perpendiculaires sur au, av; et le mouvement composant ah se décomposera lui-même en deux autres ab, ac, respectivement parallèles aux axes AX, AY. Ainsi le mouvement ae peut se décomposer en trois autres ab, ac, ad, parallèles aux trois axes coordonnés.

Sur les trois droites rectangulaires ab, ac, ad, formons un parallélipipède, dont la diagonale sera évidemment la droite ae. Ces droites ab, ac, ad, étant perpendiculaires sur les faces $ehbg$, $ehcf$, $efdg$, les triangles abe, ace, ade, seront rectangles en b, c, d. Si l'on désigne donc par α, β, γ les

angles que la direction du mouvement fait avec des droites parallèles aux axes coordonnés, c'est-à-dire, si l'on fait l'angle $eab = \alpha$, $eac = \beta$, $ead = \gamma$; on aura $ae : ab : ac : ad :: 1 : \cos.\alpha : \cos.\beta : \cos.\gamma$. Par conséquent, si l'on appelle V, u, v, w, les vitesses représentées par ae, ab, ac, ad; les composantes respectivement parallèles aux axes AX, AY, AZ, seront

$$u = V\cos.\alpha;\ v = V\cos.\beta;\ w = V\cos.\gamma.$$

Ainsi *tout mouvement d'un point matériel, donné en grandeur et en direction, peut se décomposer en trois autres parallèles à trois axes fixes rectangulaires entre eux, et représentés par les trois arêtes contiguës au même angle d'un parallélipipède rectangle, dont la diagonale, contiguë au même angle, représente le mouvement donné.*

Les trois équations ci-dessus déterminent la grandeur de ces arêtes.

105. Donc, en général, *des mouvemens quelconques donnés, d'un point matériel, peuvent se réduire à trois parallèles à trois axes perpendiculaires entre eux :* et, si l'on désigne les intensités des vitesses données par les lettres v', v'', etc.; les angles que leurs directions font avec ces axes, par α', α'', etc., β', β'', etc., γ', γ'', etc.; enfin les trois mouvemens com-

posés, par u, v, w; on aura, pour le mouvement parallèle à l'axe

des $x \ldots u = v' \cos. \alpha' + v'' \cos. \alpha'' +$ etc.;
des $y \ldots v = v' \cos. \beta' + v'' \cos. \beta'' +$ etc.;
des $z \ldots w = v' \cos. \gamma' + v'' \cos. \gamma'' +$ etc.

En effet, par le numéro précédent, chacun des mouvemens v', v'', etc., peut se décomposer en trois autres parallèles aux axes donnés. D'ailleurs (91, 93) les mouvemens $v' \cos. \alpha'$, $v'' \cos. \alpha''$, etc., se composent en un seul parallèle à AX et égal à leur somme, pourvu que l'on prenne *positivement* ceux qui sont dirigés dans un sens, et *négativement* ceux qui le sont en sens contraire. Il en est de même des mouvemens parallèles aux axes AY, AZ.

106. L'inverse de la proposition (104) est aussi vraie, c'est-à-dire, *trois mouvemens u, v, w, d'un point matériel, parallèles à trois axes perpendiculaires entre eux, et composés eux-mêmes d'une manière quelconque, se composent en un seul V, représenté par la diagonale du parallélipipède rectangle, construit sur les trois droites qui représentent les trois mouvemens donnés.* L'expression de ce mouvement composé est

$$[1] \ldots . V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

et sa direction fait avec les axes *A X*, *A Y*, *A Z*, des angles α, β, γ, déterminés par les équations

[2] . . . $\cos.\alpha = \frac{u}{V}$; $\cos.\beta = \frac{v}{V}$; $\cos.\gamma = \frac{w}{V}$.

L'on a aussi, comme (103) [4],

[3]... $V = u \cos.\alpha + v \cos.\beta + w \cos.\gamma$.

En effet, élevant aux carrés les membres des équations du n.° 104, puis les ajoutant, et remarquant que, par l'essence même du parallélipipède rectangle, $1 = \cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma$; on trouve la formule [1]. Les mêmes équations (104) donnent immédiatement les formules [2]. Enfin, multipliant la première des mêmes équations (104) par $\cos.\alpha$, la seconde par $\cos.\beta$, la troisième par $\cos.\gamma$, et les ajoutant ensuite, on obtiendra l'équation [3].

Relativement à ces formules, on fera une remarque analogue à celle qui termine le n.° 103. La formule [1] caractérise le mouvement complet, composé de u, v, w. La formule [3], jointe aux équations [2], conduit à la formule [1] : mais l'équation [3], toute seule, n'exprime que le mouvement composé de u, v, w, suivant une droite quelconque, qui fait avec leurs directions respectives les angles α, β, γ (102).

107. D'après l'idée même de la composition des mouvemens (96), on peut toujours substituer la vitesse entière V, composée, aux composantes u, v, w. Si l'on conçoit donc qu'une droite menée par le point mobile a fasse l'angle δ avec la direction de V; la vitesse V' du mobile suivant cette nouvelle droite, due aux vitesses u, v, w, sera (101)

[1] . . . $V' = V \cos. \delta$.

Si α', β', γ', sont les angles que cette droite fait avec les axes AX, AY, AZ; l'angle δ sera donné par la formule

[2] . . . $\cos. \delta = \cos. \alpha. \cos. \alpha' + \cos. \beta. \cos. \beta' + \cos. \gamma. \cos. \gamma'$.

En effet, prenant sur la droite qui représente la direction de V une portion quelconque $= a$, et sur la nouvelle droite, une portion aussi quelconque $= a'$, puis joignant les extrémités de ces deux portions par une droite que nous ferons $= b$; on sait, par la trigonométrie, que

$$b^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'. \cos. \delta.$$

D'un autre côté, les projections des lignes a, a', sur les axes coordonnés, donneront aussi, comme nous l'avons vu pour ae (104),

$b^2 = (a \cos. \alpha - a' \cos. \alpha')^2 + (a \cos. \beta - a'. \cos. \beta')^2 + (a \cos. \gamma - a' \cos. \gamma')^2 \ldots\ldots$
$= a^2 (\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma)$

$+ a'^2 (\cos.^2 \alpha' + \cos.^2 \beta' + \cos.^2 \gamma') - 2aa'$
$(\cos.\alpha.\cos.\alpha' + \cos.\beta.\cos.\beta' + \cos.\gamma.\cos.\gamma')$;
ou enfin $b^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'(\cos.\alpha.\cos.\alpha'$
$+ \cos.\beta.\cos.\beta' + \cos.\gamma.\cos.\gamma')$.

Égalant entre elles les deux valeurs de b^2, on en tirera l'équation [2].

108. Ces compositions et décompositions ne sont pas particulières aux mouvemens d'un point matériel, ou aux mouvemens progressifs. Nous allons démontrer, d'après M. *de la Grange* [1], que les rotations élémentaires d'un système quelconque, rapportées à trois axes AX, AY, AZ (*fig.* 10), perpendiculaires entre eux, se composent et se décomposent de la même manière. *Fig.* 10.

Pour cela, rapportons chaque point a du système aux trois plans rectangulaires XAY, XAZ, YAZ, par des coordonnées $AB = aG = x$, $AC = aF = y$, $AD = aE = z$; et concevons d'abord que le système tourne un instant autour de l'axe AZ : tous ses points décriront des arcs circulaires, semblables entre eux, et situés dans des plans parallèles à XAY (82). Soit am l'arc élémentaire que le point a décrit, dans ce mouvement, du rayon aD. Ce petit arc, qu'on peut supposer

---

1. *Mécanique analytique*, 1 *P.* 3 *Sect.*

se confondre avec sa tangente, représentera la vitesse entière du point a. Si donc on abaisse les perpendiculaires mn, mo, sur les coordonnées Ga, Ea; les petites droites $an = mo$, $ao = mn$, représenteront les vitesses du point a parallèlement aux axes des coordonnées x, y. Quant à sa vitesse parallèle à l'axe des z, elle est évidemment nulle, puisque le mouvement a lieu dans un plan perpendiculaire à cet axe.

La similitude des triangles rectangles DGa, anm, dont les côtés sont respectivement perpendiculaires entre eux, fournit les équations $an = \frac{am}{aD} \cdot DG$; $ao = \frac{am}{aD} \cdot aG$. Mais si l'on désigne par $d\phi$ l'arc élémentaire décrit du rayon 1 dans le même mouvement, on aura $d\phi = \frac{am}{aD}$. Donc $an = y\,d\phi$, et $ao = x\,d\phi$. Ainsi la variation de l'ordonnée $AB = x$, due à la rotation élémentaire $d\phi$ du système autour de l'axe AZ, est $-an = -y\,d\phi$, et celle de l'ordonnée $AC = y$ est $+ao = x\,d\phi$. Celle de l'ordonnée z est nulle.

Pareillement les variations des coordonnées x, y, z du point a, dues à une rotation élémentaire $d\omega$ du système autour de l'axe AY, en allant de Z vers X, seront $+z\,d\omega, o, -x\,d\omega$.

Enfin les variations élémentaires de x, y, z, provenantes de la rotation élémentaire $d\psi$ autour de AX, en allant de Y vers Z, seront o, $-zd\psi$, $+yd\psi$.

Si l'on imagine maintenant que les trois rotations élémentaires $d\varphi$, $d\omega$, $d\psi$, aient lieu à la fois, les variations totales dx, dy, dz, des coordonnées x, y, z du point a, seront égales aux sommes des variations partielles, dues à chacune de ces rotations. On aura donc

[1].. $dx = zd\omega - yd\varphi$; $dy = xd\varphi - zd\psi$; $dz = yd\psi - xd\omega$.

Il est visible, d'après ces équations, que si les coordonnées x, y, z, d'un point quelconque du système, étaient respectivement proportionnelles à $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$; les variations dx, dy, dz, seraient nulles. Donc tous les points du système qui répondraient à des coordonnées de cette nature, seraient immobiles pendant l'instant que le système décrirait les angles $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, en tournant autour des axes AX, AY, AZ.

Or, quand $dx = o$, $dy = o$, $dz = o$, les formules [1] donnent, pour les projections de ces points sur les plans des coordonnées, les équations,

[2]... $x = \frac{d\psi}{d\varphi}z$, $y = \frac{d\omega}{d\varphi}z$, $x = \frac{d\psi}{d\omega}y$,

lesquelles appartiennent évidemment à une ligne droite, passant par l'origine *A* des coordonnées. Cette droite sera donc immobile pendant l'instant que le système se meut autour des axes. Ainsi ce mouvement ne pourra être qu'une simple rotation autour de cette même droite, qu'on nommera, à cause de cela, *l'axe instantané de rotation.*

Si l'on appelle λ, μ, ν, les angles que cet axe fait avec les axes rectangulaires *A X*, *A Y*, *A Z*, on aura évidemment $\cos.\lambda = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $\cos.\mu = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $\cos.\nu = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$; ou bien, en vertu des équations [2], $\cos.\lambda = \frac{d\psi}{\sqrt{d\psi^2+d\omega^2+d\varphi^2}}$, $\cos.\mu = \frac{d\omega}{\sqrt{d\psi^2+d\omega^2+d\varphi^2}}$, $\cos.\nu = \frac{d\varphi}{\sqrt{d\mu^2+d\omega^2+d\varphi^2}}$.

Pour avoir l'angle décrit en vertu de cette rotation unique, on considèrera que $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ est en général l'élément de l'espace décrit par un point quelconque qui répond aux coordonnées x, y, z.

Or, en substituant les valeurs de dx, dy, dz, tirées des équations [1], on a . . . .

$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (z d\omega - y d\varphi)^2 + (x d\varphi - z d\psi)^2 + (y d\psi - x d\omega)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2) - (x d\psi + y d\omega + z d\varphi)^2$.

D'un autre côté, l'on sait [1] que les équations d'une droite étant $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, l'équation d'un plan perpendiculaire à cette droite, et passant par le point qui aurait x', y', z' pour coordonnées, serait

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0.$$

Substituant pour a et b leurs valeurs $\frac{d\psi}{d\varphi}$, $\frac{d\omega}{d\varphi}$, prises dans les formules [2], et supposant que ce plan passe par l'origine des coordonnées, ce qui revient à faire $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, l'équation précédente deviendra

$$x d\psi + y d\omega + z d\varphi = 0.$$

Cette dernière équation est donc celle d'un plan passant par l'origine des coordonnées, et perpendiculaire à l'axe instantané de rotation. Donc l'espace élémentaire décrit par un point quelconque de ce même plan, sera exprimé simplement par . . . .

1. Voy. *Monge*, Feuilles d'analyse, n.° 2, V; *Monge* et *Hachette*, Application de l'algèbre à la géométrie, pag. 11; *Lacroix*, Traité du calcul différ. et du calc. intégr. tom. I, n.° 301; *idem*, Applicat. de l'algèbre à la géom. 3.e *édit.* n.° 172; *Biot*, des Courbes et des Surfaces du 2.e degré, 1.ère *édit.* n.ºs 33 et 39; 2.e *édit.* n.ºs 53 et 64.

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \times \sqrt{d\psi^2+d\omega^2+d\phi^2}$, si l'on désigne toujours par x, y, z les coordonnées de ce point. Or $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ étant la distance de ce point à l'origine A des coordonnées, où le plan et l'axe instantané de rotation se coupent à angles droits, il est évident (82, 3.°) que l'espace décrit dans le même instant par un point dont la distance à ce même axe $=1$, sera l'angle élémentaire $\sqrt{d\psi^2+d\omega^2+d\phi^2}$, que nous désignons par $d\theta$. Donc

Des rotations quelconques $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$, *autour de trois axes qui se coupent perpendiculairement dans un point, se composent en une seule,* $d\theta = \sqrt{(d\psi^2+d\omega^2+d\phi^2)}$, *autour d'un axe passant par le même point d'intersection, et faisant avec ceux-là des angles* λ, μ, ν, *tels que* $\cos.\lambda = \frac{d\psi}{d\theta}$, $\cos.\mu = \frac{d\omega}{d\theta}$, $\cos.\nu = \frac{d\phi}{d\theta}$.

Réciproquement *une rotation quelconque* $d\theta$, *autour d'un axe donné, peut se décomposer en trois rotations partielles, exprimées par* $d\theta.\cos.\lambda$, $d\theta.\cos.\mu$, $d\theta.\cos.\nu$, *autour de trois axes qui se coupent perpendiculairement dans un point de l'axe donné, et qui fassent avec lui les angles* λ, μ, ν.

Les vitesses angulaires étant proportionnelles aux rotations (83), on peut les substituer à celles-ci dans l'énoncé de ce théorème.

109. En comparant les expressions précédentes avec celles du n.° 106, on voit que les rotations et les vitesses angulaires se composent et se décomposent exactement de la même manière que les mouvemens progressifs. D'où il suit que, si $d\theta'$ représente la rotation élémentaire du système autour d'une droite faisant les angles λ', μ', ν' avec les axes des coordonnées x, y, z; on aura (106) [3] :

[1] . . $d\theta' = d\psi.\cos.\lambda' + d\omega.\cos.\mu' + d\varphi.\cos.\nu'$; ou bien encore (107)

[2] . . $d\theta' = \cos.\delta \times \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}$, l'angle δ étant donné par la formule

[3] . . $\cos.\delta = \cos.\lambda.\cos.\lambda' + \cos.\mu.\cos.\mu' + \cos.\nu.\cos.\nu'$.

L'équation [2] fait voir que le système ne peut tourner autour d'aucune droite perpendiculaire à l'axe instantané de rotation, puisque, dans ce cas, l'angle δ est droit, et partant $\cos.\delta = 0$.

CHAPITRE II.

Généralités sur les forces.

110. Après avoir exposé ce que l'on entend par mouvement en général, et par diverses espèces particulières de mouvement; après avoir appris à les composer et décomposer, à les mesurer, ou du moins à mesurer les vitesses; il est naturel de parler des causes du mouvement, et des lois qu'elles suivent dans leurs actions. Il ne peut être ici question ni de la cause première, ni même des causes secondes, spirituelles et libres : nous avons déjà fait observer (4) que les causes matérielles et nécessaires sont seules du ressort direct de la physique.

§. I. *Notions de l'inertie et de la force.*

111. Des rapports purement extérieurs ne pouvant contribuer en rien à la génération du mouvement, il est permis, dans la recherche de ses causes et de leurs lois, de n'avoir aucun égard à ces rapports, et de ne considérer les corps que dans l'espace absolu. On peut même, si l'on veut, faire d'abord abstraction de tous les grands corps de la nature, pour ne s'occuper que d'une parti-

cule de matière, afin de voir si la matière peut agir sur elle-même et changer son état de repos ou de mouvement. Sans cet examen préalable, on ne pourrait jamais compter sur la justesse de l'application des principes abstraits de la mécanique aux cas de la nature.

112. Loi de l'inertie. *Aucune particule de matière ne peut changer d'elle-même, ni son état de repos, ni son état de mouvement.*

Donc si un point matériel est une fois en repos, il y persévèrera toujours; et s'il est une fois en mouvement, il continuera toujours de se mouvoir dans la même direction et avec la même vitesse, tant qu'aucune cause étrangère ne viendra changer cet état.

En effet, l'*expérience* nous représente la matière comme entièrement privée de la faculté de penser, et de tout ce qui s'y rapporte, comme la faculté de sentir du plaisir et du déplaisir, de désirer ou de vouloir. Or, excepté le principe de la pensée prise dans le sens le plus étendu, nous ne connaissons aucun principe intrinsèque en vertu duquel une substance puisse agir sur elle-même. Donc un point matériel ne peut pas agir sur lui-même : il ne peut de lui-même, ni sortir de son état de repos, ni changer son état

de mouvement, soit en s'écartant à gauche ou à droite de sa première direction, soit en accélérant ou en retardant la vitesse qu'il a reçue. Il persévèrera donc dans son état, quel qu'il soit, jusqu'à ce qu'une cause distinguée de lui-même le force d'en sortir.

Dans la Dynamique, on étend cette loi à un système quelconque de points matériels ou de corps, en faisant voir que, quelles que soient les actions réciproques des parties de ce système, il y a toujours, dans ce même système, un point (*le centre de gravité*) dont l'état de repos ou de mouvement n'est nullement altéré par ces actions. Nous sommes tous tellement persuadés de la vérité de cette loi, que, s'il nous arrive de ne pas trouver un corps inanimé à la place où nous l'avions mis, il ne nous vient jamais à l'esprit qu'il l'ait quittée de lui-même. D'ailleurs « nous « observons sur la terre, que les mouvemens « se perpétuent plus long-temps, à mesure « que les obstacles qui s'y opposent, viennent « à diminuer; ce qui nous porte à croire « que sans ces obstacles ils dureraient tou- « jours. Mais l'inertie de la matière est prin- « cipalement remarquable dans les mouve- « mens célestes, qui, depuis un grand nombre « de siècles, n'ont point éprouvé d'altération

« sensible. » (*Exposit. du Syst. du monde*, l. 3, chap. 2, et *Mécan. cél.* liv. 1, chap. 2.) Ainsi les observations les moins indirectes qu'il nous soit donné de faire sur la loi de l'inertie, doivent nous faire conclure que toute molécule de matière est incapable de se donner, ou de s'ôter à elle-même, du mouvement.

113. C'est *cette impuissance où est la matière de changer son état de repos ou de mouvement*, qu'on appelle INERTIE, *passivité*.

L'inertie n'est donc rien de *positif*; elle n'indique dans la matière aucune tendance *positive* à persévérer dans son état de repos ou de mouvement : elle signifie seulement que la matière est *inanimée*, ou qu'elle est privée de tout principe intrinsèque d'activité sur elle-même, capable de modifier son état individuel. C'est aussi sur cette idée que sont fondés, en dernière analyse, les raisonnemens qu'on a coutume d'apporter en preuve de la loi de l'inertie, quoiqu'on ne les appuie directement que sur le *principe de la raison suffisante*.[1]

---

1. D'après cette notion de l'inertie, on pourrait s'étonner qu'un génie comme *Descartes* ait cru qu'un corps en mouvement devait, par son inertie, rétrograder ou se mouvoir

On conclura de cette notion de l'*inertie*, qu'on ne peut pas donner ce nom à la résistance que les corps opposent à leur changement d'état, ni supposer l'*inertie* proportionnelle aux masses; qu'il serait bon de bannir de la mécanique les dénominations de *centre d'inertie*, de *force d'inertie* : mais nous reviendrons sur ce dernier article (145).

114. On donne le nom de FORCE, de PUISSANCE, *à tout ce qui change ou tend à changer l'état de repos ou de mouvement d'un corps;* ou, ce qui revient au même, *à tout ce qui imprime du mouvement à une substance matérielle quelconque*, soit que cette substance obéisse au mouvement imprimé, soit qu'elle

---

de côté, dès qu'il rencontrait un obstacle qui l'empêchait d'avancer; que *Gordon* et *Kratzenstein* aient soutenu que l'inertie n'est que la pesanteur des corps; que *Nollet* et ses disciples se soient amusés à prouver par des expériences, que l'inertie ne provient pas de la résistance de l'air; que *Pryestley* ait prétendu que c'est avilir la matière, que de lui attribuer l'inertie, etc.; enfin, que des êtres pensans se soient oubliés au point de se confondre avec la pure matière, toujours sur les conjectures les plus hasardées, et quelquefois même sous le simple prétexte que la différence des deux natures n'est pas mathématiquement démontrée, comme si l'objet de ces sortes de démonstrations ne se bornait pas à nos seules idées, et qu'il dût encore s'étendre à la nature des êtres existans, que l'expérience seule peut nous faire connaître.

n'y obéisse pas. Ainsi les poids, les ressorts, les courans d'eau, le vent, etc., sont des forces, en tant qu'ils pressent quelque corps, qu'ils produisent ou détruisent du mouvement.

115. D'après ces définitions, un corps en mouvement ne mérite le nom de force, qu'autant qu'il change réellement ou tend à changer l'état d'un autre corps, et non précisément en tant qu'il est en mouvement.

Mais comment l'état d'un corps peut-il être changé, ou suivi d'un autre état, souvent opposé ? C'est un mystère impénétrable à l'homme, qui ne peut connaître la force que par ses effets, et que déterminer les lois de son action.

116. Loi de continuité. *Nulle force ne peut changer sensiblement l'état d'un corps, qu'en agissant successivement et d'une manière continue, et non par une action unique et instantanée.*

Car supposons que le corps sur lequel la force agit, passe de l'état A à un autre état B. Les deux instans où le corps est dans ces deux états, sont nécessairement différens entre eux, et par conséquent les limites d'un temps intercepté entre les deux : ce temps est continu et divisible en une infinité de

parties (58), dans chacune desquelles l'état du corps est un et entièrement déterminé. Mais aucun de ces états intermédiaires n'est ni *A* ni *B*. Donc le corps ne peut parvenir de l'état *A* à l'état *B*, sans passer par une infinité d'états intermédiaires, qui tous font partie du changement entier de l'état *A* en l'état *B*. Or tout changement exige une cause qui agisse pendant tout le temps qu'il s'opère. Donc la force qui produit ce changement, ne le fait pas instantanément, mais par une action continue.

117. La loi de continuité, établie par ce raisonnement, est purement métaphysique, et peut s'étendre à toute espèce de changement. Si, pour l'appliquer plus particulièrement à la mécanique, on joint à l'idée d'un changement celle de l'inertie, on concevra aisément que la vitesse d'un corps, dans un instant quelconque, est composée d'une infinité de degrés acquis précédemment, et qu'il a conservés à cause de son inertie. On verra de même que les corps ne parviennent que par degrés au repos.

Ainsi par les *changemens brusques* qui arrivent, par quelque cause que ce soit, dans les mouvemens des corps d'un système, il ne faut pas entendre des changemens *instantanés*,

mais seulement des changemens opérés dans des temps qui sont très-courts, sans être les plus courts possibles.

118. La DIRECTION de la force est *la droite suivant laquelle elle agit*, ou la droite qu'elle fait décrire, ou tend à faire décrire, au point matériel qu'elle sollicite.

119. 1.° *Si donc un point matériel, après avoir reçu l'action d'une seule force, est ensuite abandonné à lui-même, il suivra toujours la direction de cette force* (112).

2.° *Donc, si un point matériel est animé de plusieurs forces à la fois, son mouvement, en tant que produit par l'une quelconque d'entre elles, se fait toujours dans la direction de cette force.*

3.° *Enfin un point matériel ne peut décrire une courbe qu'autant qu'il reçoit à chaque instant de nouvelles impressions suivant des directions différentes.* (1.°)

§. II. *Mesure des forces en général.*

120. Demande de mécanique. *Si plusieurs forces agissent dans la même direction et dans le même sens sur un même point matériel, ces forces*, ou plutôt leurs actions sur ce point, *s'ajoutent ensemble*; c'est-à-dire, elles équivalent à une force unique, qui serait égale

à leur somme, aurait la même direction et agirait dans le même sens qu'elles.

Cette demande est conforme à tout ce que l'expérience nous apprend sur les forces : mais l'ériger en *axiome*, ce serait attacher à ce mot un sens différent de celui qu'on lui donne dans les mathématiques pures, puisque la nature des forces nous est entièrement inconnue. Cependant, cette hypothèse étant une fois admise, on voit qu'il est permis de ne regarder les forces que comme de purs rapports à leur unité, et que, sous ce point de vue, leur théorie est susceptible de l'évidence mathématique.

121. *La force unique, qui équivaut à plusieurs autres prises ensemble*, s'appelle la RÉSULTANTE *de ces forces ;* et celles-ci, considérées par rapport à cette résultante, se nomment forces *composantes.* Quelques auteurs donnent le nom de *direction moyenne* des composantes, à la direction de leur résultante.

L'opération par laquelle on détermine la résultante de plusieurs forces, se nomme la *composition des forces ;* et celle par laquelle on trouve les composantes, s'appelle la *décomposition des forces.*

122. Fondement de la mesure des forces. *La force*, ou plutôt l'action des forces, *est*

proportionnelle à la vitesse; ou, ce qui revient au même, *plusieurs forces, en agissant dans la même direction et dans le même sens, font parcourir à un point matériel, pendant l'unité de temps, un espace égal à la somme de ceux que chacune d'elles séparément lui ferait parcourir dans cette unité de temps.*

Supposons d'abord que les forces données, P, p, soient commensurables entre elles, de sorte que $P=Nf$, $p=nf$: au lieu des forces P, p, on pourra (120) prendre Nf, nf; et l'on aura

$$P : p :: N : n.$$

Soit u la vitesse que la force f imprimerait à un point matériel : un nombre N de forces égales chacune à f, agissant en même temps dans la même direction et dans le même sens sur ce même point matériel, doit lui imprimer un nombre N de vitesses égales chacune à u. Donc, puisque la vitesse d'un point matériel, résultante de plusieurs vitesses simultanées et dirigées dans le même sens, est égale à leur somme (91); le point matériel sur lequel agit la force $P=Nf$, doit avoir, en vertu de cette force, une vitesse unique $V=Nu$.

On voit de la même manière, que la vitesse d'un point matériel, en vertu de la

force $p = nf$, *doit être* $v = nu$. Par conséquent

$$V : v :: N : n.$$

Comparant cette proportion avec celle qu'on a trouvée plus haut, on aura enfin

$$P : p :: V : v.$$

Si le rapport $P : p$ ne peut pas s'exprimer par un nombre, ou aura du moins $P = Nf$, $p = nf + f'$, la quantité f' étant plus petite que f, et par conséquent d'autant plus petite que f est moindre. Or rien n'empêche de prendre f plus petite que toute quantité assignable : dans ce cas, on aura $P = Nf$, $p = nf$, comme nous l'avons supposé.

Ces raisonnemens sont confirmés par l'expérience. Car « on peut établir comme une « loi générale des mouvemens terrestres, que, « si dans un système de corps emportés d'un « mouvement commun, on imprime à l'un « d'eux une force quelconque, son mouve- « ment relatif ou apparent sera le même, « quel que soit le mouvement général du sys- « tème et l'angle que fait sa direction avec « celle de la force imprimée. (Or) la propor- « tionnalité de la force à la vitesse résulte de « cette loi supposée rigoureuse : car, si l'on « conçoit deux corps mus sur une même « droite, avec des vitesses égales, et qu'en

« imprimant à l'un d'eux une force qui « s'ajoute à la première, sa vitesse, relative- « ment à l'autre corps, soit la même que si « les deux corps étaient primitivement en « repos ; il est visible que l'espace décrit par « le corps, en vertu de sa force primitive « et de celle qui lui est ajoutée, est alors « égal à la somme des espaces que chacune « d'elles eût fait décrire séparément dans le « même temps : ce qui suppose la force pro- « portionnelle à la vitesse. . . .

« Tous les phénomènes célestes viennent « à l'appui de ces preuves. La vitesse de la « lumière, déterminée par les éclipses des « satellites de Jupiter, se comporte avec celle « de la terre exactement comme dans la loi « de la proportionnalité de la force à la vi- « tesse ; et tous les mouvemens du système « solaire, calculés d'après cette loi, sont en- « tièrement conformes aux observations. » C'est dans l'*Exposit. du syst. du monde*, l. 3, ch. 2, et dans la *Mécan. céleste*, l. 1, n.° 5, dont ce passage est tiré, qu'il faut voir l'ensemble des preuves que le génie peut déduire de l'observation, à l'appui de cette loi.

123. La force étant proportionnelle à la vitesse, tout ce que nous avons établi précédemment sur les rapports et la composition

des vitesses, s'applique aux rapports et à la composition des forces. Ainsi

1.° *Deux forces égales et directement opposées, et qui agissent en même temps sur un même point matériel, détruisent leurs actions mutuelles,* ou ne produisent aucun mouvement. Car ce point peut être considéré comme ayant deux vitesses égales (122) et directement opposées (118). Il doit donc, en vertu de ces deux forces, rester en repos (92).

En effet, un point ne peut aller en même temps par plusieurs chemins, rapportés au même espace. Mais il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve dans la direction de l'une des deux forces plutôt que dans celle de l'autre. Il ne peut donc prendre aucun mouvement, en vertu de ces deux forces.

2.° Réciproquement, *lorsque deux forces détruisent mutuellement les actions qu'elles exercent sur un même point matériel, elles sont égales et directement opposées.* 1.° Elles sont *égales ;* sans quoi elles imprimeraient des vitesses inégales (122), et le point matériel prendrait du mouvement dans le sens de la plus grande (93). 2.° *Directement opposées;* car si les directions des deux forces, et par conséquent (118) celles des vitesses imprimées au mobile, faisaient angle entre elles,

ce mobile suivrait la diagonale qui aurait pour côtés les deux droites qui représenteraient ces deux vitesses (95).

124. Lorsque deux ou plusieurs forces, en agissant sur le même point ou sur le même corps, se contrebalancent, ou détruisent mutuellement les actions qu'elles exercent les unes sur les autres, on dit qu'elles se font ÉQUILIBRE. L'état de repos ou de mouvement du point ou du corps qu'elles sollicitent, n'est pas altéré par ces forces; et l'on dit aussi que ce point ou ce corps demeure en *équilibre*. L'*équilibre* désigne donc, ou l'état d'un corps sollicité par des forces qui se combattent et anéantissent leurs actions réciproques, ou l'état même de ces forces.

125. Dans les numéros précédens, nous avons supposé que les forces n'agissaient que sur des points matériels, ou du moins qu'elles agissaient sur des masses égales. Concevons maintenant que les masses M, m, se meuvent ou tendent à se mouvoir avec la même vitesse u, et cherchons le rapport des forces nécessaires pour leur imprimer cette vitesse.

Imaginons, pour cela, la masse M divisée en un nombre N, et la masse m en un nombre n de points matériels, de sorte que l'on ait

$$M : m :: N : n,$$

la mesure $p = mv$, ou $v = \frac{p}{m}$; etc. On en attribue communément la découverte à *Descartes*, quoiqu'elle paraisse avoir été connue d'*Aristote* (*Natur. auscult.* libr. VII, c. VI).

128. En rapprochant cette mesure des forces, des propositions énoncées (123), on voit évidemment que,

1.° *Si deux corps non élastiques viennent à se chòquer directement en sens contraires, avec des quantités égales de mouvement, leurs forces doivent se détruire, et par conséquent les corps doivent s'arrêter ou demeurer en équilibre.*

2.° Réciproquement, *pour l'équilibre de deux corps non élastiques qui viennent à se choquer directement en sens contraires, les quantités de mouvement doivent être égales entre elles; et par conséquent les vitesses doivent être réciproques aux masses.*

Pour mettre dans un plus grand jour encore une matière sur laquelle les philosophes ont eu tant de peine à s'entendre, nous allons ajouter la démonstration que M. *De la Place* a donnée de cette seconde proposition, dans sa *Mécan. cél.* l. 1, n.° 13, et dans son *Exposit. du syst. du monde*, l. 3, ch. 3.

« Concevons un nombre N de points ma-

« tériels contigus, disposés en ligne droite,
« et animés de la vitesse V dans la direction
« de cette droite. Concevons pareillement un
« nombre n de points matériels contigus,
« disposés sur la même droite, et animés de
« la vitesse v directement contraire à V, en
« sorte que les deux systèmes viennent à se
« choquer. Il doit exister, pour leur équi-
« libre à l'instant du choc, un rapport entre
« V et v, qu'il s'agit de déterminer.

« Pour cela, nous observerons que le sys-
« tème N, animé de la vitesse V, ferait équi-
« libre à un seul point matériel animé de la
« vitesse NV, dirigée en sens contraire; car
« chaque point du système détruirait, dans
« ce dernier point, une vitesse égale à V,
« et par conséquent ses N points détruiraient
« la vitesse entière NV. On peut donc subs-
« tituer à ce système un seul point animé
« de la vitesse NV. On peut semblablement
« substituer au système n un seul point
« animé de la vitesse nv. Or les deux sys-
« tèmes étant supposés se faire équilibre, les
« deux points qui en tiennent lieu, doivent
« pareillement se faire équilibre; ce qui
« exige que leurs vitesses soient égales. On a
« donc, pour la condition de l'équilibre des
« deux systèmes, $NV = nv$. »

Ce raisonnement, étant indépendant de ce que nous avons dit (122), peut servir de fondement à la mesure des forces, pourvu toutefois que les vitesses dans le même sens s'ajoutent ensemble.

129. *La réciprocité des vitesses aux masses, dans le cas de l'équilibre entre deux corps non élastiques, fournit le moyen le plus direct de déterminer le rapport des masses des corps du même genre.* Car, « si l'on conçoit deux « globes de matières différentes, et que l'on « fasse varier leurs diamètres jusqu'à ce « qu'en les animant de vitesses égales et di- « rectement contraires, ils se fassent équi- « libre ; on sera sûr qu'ils renfermeront le « même nombre de points matériels, et par « conséquent des masses égales. On aura « donc ainsi le rapport des volumes de ces « substances, à égalité de masse ; ensuite, à « l'aide de la géométrie, on en conclura le « rapport des masses de deux volumes quel- « conques des mêmes substances. Mais cette « méthode serait d'un usage très-pénible « dans les comparaisons nombreuses qu'exi- « gent, à chaque instant, les besoins du com- « merce. Heureusement la nature nous offre, « dans la pesanteur des corps (161), un moyen « très-simple de comparer leurs masses. » (*Ib.*)

§. III. *Diverses espèces de forces, et leurs mesures.*

130. Les forces sont les unes *extérieures*, les autres *intérieures*.

On appelle EXTÉRIEURE, et quelquefois *mécanique, toute force que la matière n'exerce qu'en vertu de son mouvement, ou de sa tendance au mouvement.* Telles sont la percussion des corps; la tension et la traction des fils; la pression des poids, des ressorts, etc. Un corps n'agit, à distance, avec une force extérieure, que par le moyen d'autres corps interposés : son action immédiate se borne aux corps qui sont en contact avec lui. Les forces extérieures dépendent donc directement de l'impénétrabilité de la matière; car si un corps en mouvement passait librement à travers un autre corps, il est clair que la rencontre de ces deux corps n'altérerait nullement leur état respectif.

D'après ces notions, on peut sans inconvénient confondre la mesure de la force extérieure avec celle de son action : mais nous ferons bientôt remarquer qu'il n'en est pas ainsi de la force intérieure.

131. La force INTÉRIEURE, ou pénétrante, *est la force en vertu de laquelle un point maté-*

riel ou un corps agit, indépendamment de son propre état de repos ou de mouvement et de l'interposition des corps intermédiaires, dans toutes les directions, sur d'autres points matériels, soit en repos, soit en mouvement, et placés à des distances quelconques.

La force intérieure est appelée ATTRACTIVE *ou* RÉPULSIVE, *suivant qu'elle tend à rapprocher ou à éloigner les corps sur lesquels elle agit, de ceux dans lesquels elle réside;* et l'action qu'elle exerce se nomme alors *attraction* ou *répulsion.*

132. La force intérieure est *générale,* ou *particulière.*

La *force intérieure* générale *est celle que chaque particule de matière exerce sans cesse dans toutes les directions et sur toutes les autres particules matérielles répandues dans l'univers.* Tous les phénomènes célestes concourent à prouver la réalité d'une pareille force dans la nature; et rien n'indique que son action sur les corps dépende des corps intermédiaires.

La force intérieure particulière *est celle qui ne convient qu'à certaines matières sur certaines matières,* soit que cette particularité tienne à des différences essentielles dans la nature même des molécules intégrantes, soit

qu'elle ne provienne que des différences dans la figure et la grandeur des pores de ces matières et dans celles de leurs molécules. C'est sans doute dans des forces de cette nature qu'il faut chercher la source de l'action des corps électrisés sur les autres corps, de l'aimant sur le fer, le nickel et le cobalt.

133. Loi suivant laquelle s'exerce l'action des forces intérieures. *Les actions que deux forces intérieures, de la même nature, exercent dans le même instant sur un même point matériel, sont entre elles en raison directe des masses agissantes, et en raison inverse du carré des distances de ces masses au point sur lequel elles agissent.*

1.° On peut regarder la force intérieure générale (132) comme essentielle à la matière. Ainsi, en vertu de cette force, les points d'une masse quelconque agissent tous avec la même intensité sur un point matériel placé à la même distance de chacun d'eux. Par conséquent l'action de la force intérieure d'une masse quelconque sur un point matériel, est proportionnelle à cette masse même.

Ce raisonnement s'applique à la force intérieure particulière, en substituant l'idée d'une matière particulière à celle de la matière en général.

2.° Ne considérons maintenant que la force intérieure d'un point matériel, et concevons que de ce point pris pour centre on décrive autant de sphères qu'on voudra : il semble que, ce point ne tenant sa force que de la matière qu'on y suppose concentrée, l'intensité de son action doit rester la même, quelle que soit la sphère sur la surface de laquelle on se figure cette action répandue. L'intensité de cette action serait donc la même sur des portions semblables des surfaces de ces différentes sphères : par conséquent sur des portions égales des surfaces de deux de ces sphères, elle suivrait la raison inverse des carrés des rayons. Donc les actions que ce point exercerait dans le même instant sur deux autres points matériels situés où l'on voudra, seraient entre elles réciproquement comme les carrés des distances de ce même point à ces deux autres points.

Newton a fait voir que c'est d'après cette loi, que les corps célestes s'attirent les uns les autres. Le digne successeur de *Daniel Bernoulli* dans l'art délicat de faire les expériences et de les soumettre au calcul, M. *Coulomb*, a aussi découvert que la partie de cette loi, relative aux distances, a lieu dans les attractions et les répulsions électriques et

magnétiques. Enfin l'expérience apprend qu'elle s'observe dans toutes les émanations qui partent d'un centre ; et c'est ce qui a donné l'idée du raisonnement ci-dessus.

Il n'est même pas impossible de rapporter à cette loi les affinités chimiques et les autres forces qui n'ont d'effet sensible qu'à de très-petites distances : M. *de la Place* a remarqué qu'il suffirait pour cela de supposer les distances entre les molécules des corps, incomparablement plus grandes que les diamètres de ces molécules ; car, dans cette hypothèse, le contact donnerait une grande supériorité à la molécule attirante, située dans ce point de contact, sur l'attraction à une distance finie du contact.

134. Il suit de cette loi, qu'une force intérieure exerce, à chaque instant, des actions égales sur tous les points matériels susceptibles de son action, et qui sont également éloignés du centre de cette force, c'est-à-dire, du point d'où son action peut être censée partir. Les actions qu'elle exerce dans le même instant sur différentes masses, sont donc proportionnelles à ces masses. Ainsi

1.° *Les intensités des actions que deux masses animées d'une force intérieure de la même nature exercent à chaque instant sur*

deux autres masses quelconques, sont entre elles directement comme les produits des masses attirante et attirée, ou repoussante et repoussée, et réciproquement comme les carrés des distances entre ces mêmes masses.

2.° Donc l'intensité de l'action qu'une masse donnée exerce, en vertu d'une force intérieure, sur d'autres masses qui en sont également éloignées, est proportionnelle à ces masses.

3.° Par conséquent, un corps qui agit en vertu d'une force intérieure, imprime à une masse quelconque la même vitesse qu'il imprimerait à un point matériel qui serait à la même distance du corps agissant que les différens points de cette masse.

4.° La force intérieure ne peut donc pas se mesurer par la quantité de mouvement qu'elle imprime à un corps donné : cette quantité de mouvement ne représente que la mesure de l'action que la force exerce sur le corps donné; et c'est ici la seule chose que l'on puisse prétendre mesurer.

135. Considérons maintenant une force, soit intérieure, soit extérieure, qui agisse continuellement et dans la même direction sur un point matériel, ou sur chaque point matériel d'un système quelconque : si le sys-

tème obéit aux impressions de cette force, il est clair qu'il conservera, par son inertie (112), les nouveaux degrés de vitesse qu'il recevra à chaque instant, et que ces vitesses s'ajouteront ensemble, par la nature du mouvement rectiligne (91). Le mouvement du système sera donc accéléré. C'est par cette raison, que *les forces* de l'espèce de celles qui animent ses molécules, sont nommées *accélératrices.* Par la raison contraire, quand elles agissent dans une direction opposée à celle d'un mouvement déjà existant dans le système, on les appelle *forces retardatrices.*

En général on appelle FORCE ACCÉLÉRATRICE *d'un corps*, toute force qui agit ou qui est censée agir continuellement sur ce corps, et *qui à chaque instant imprime une vitesse infiniment petite et égale à tous ses points matériels.*

La force *accélératrice* peut devenir *retardatrice*, et réciproquement, selon les différens rapports de sa direction à celle du mouvement préexistant dans le corps dont elle anime les molécules.

136. La force accélératrice est *constante* ou *variable*, selon que les vitesses qu'elle imprime au même mobile, dans des instans égaux, sont égales ou inégales entre elles. Ainsi

La force accélératrice est CONSTANTE *quand elle imprime des vitesses proportionnelles aux temps:* au contraire, elle est VARIABLE, *lorsque le rapport des vitesses qu'elle imprime, aux temps, est variable lui-même.*

137. Désignons par u la vitesse qu'une force accélératrice constante et donnée est capable d'imprimer à un mobile en agissant pendant un certain temps t; et par g, la vitesse que cette même force imprimerait pendant l'unité de temps, et que nous savons être mesurée par le double de l'espace qu'un mobile parcourrait, dans l'unité de temps, en vertu de l'action constante de cette force accélératrice (79): par la nature même de la force accélératrice constante, nous aurons $t : 1 :: u : g$, ou

$$g = \frac{u}{t}.$$

Prenons pour l'unité des forces accélératrices constantes, celle qui serait capable d'imprimer cette vitesse g dans l'unité de temps, et représentons par φ, toute autre force accélératrice constante qui imprimerait la vitesse v dans le temps t : nous aurons (122) $u : v :: 1 : \varphi = \frac{v}{u}$, ou, parce que nous venons de trouver $u = gt$,

[1] ...... $\varphi = \frac{1}{g} \frac{v}{t}$.

138. Faisons $g = 1$, et l'équation précédente deviendra

[1] ...... $\varphi = \frac{v}{t}$;

ou, si nous mettons sa valeur (79) pour v,

[2] ...... $\varphi = \frac{2e}{t^2}$.

Or, par l'expression $g = \frac{u}{t}$, trouvée plus haut, on voit que φ est la vitesse que la force accélératrice constante est capable d'imprimer à un mobile dans l'unité de temps. *C'est donc cette même vitesse qui doit servir de mesure à la force accélératrice constante.*

Mais on ne doit pas perdre de vue qu'ayant fait ici $g = 1$, « il faudra prendre pour l'u-
« nité des espaces le double de l'espace que
« la force (prise pour l'unité des forces
« accélératrices, et) continuée également,
« ferait parcourir dans le temps qu'on veut
« prendre pour l'unité des temps, et que la
« vitesse acquise dans ce temps par l'action
« constante de la même force, sera l'unité
« des vitesses. . . Par exemple, si on prend
« la pesanteur sous la latitude de Paris pour
« l'unité des forces accélératrices, et qu'on

« compte le temps par secondes (sexagési-
« males), on devra prendre alors 9,80879
« 5248 mètres pour l'unité des espaces par-
« courus, parce que 4^m,90439 7624 est la
« hauteur d'où un corps abandonné à lui-
« même tombe dans une seconde sous cette
« latitude ; et l'unité des vitesses sera celle
« qu'un corps pesant acquiert en tombant de
« cette hauteur (*Mécan. analyt. P.* 2, *Sect.* 2).

On peut aussi prendre pour l'unité des forces accélératrices, une force idéale ou réelle, qui, en agissant toujours de la même manière pendant l'unité de temps, imprimerait à un mobile une vitesse capable de lui faire parcourir l'espace d'un mètre dans ce même temps; et, dans ce cas, le mètre sera en même temps l'unité des espaces et celle des vitesses.

139. Il est aisé de ramener la mesure des forces accélératrices variables à celle des forces constantes. Car, quelque variable que puisse être d'un instant à l'autre l'action d'une force, elle est cependant une et toute déterminée dans un instant quelconque donné, ou au bout d'un temps quelconque t; et on peut la regarder comme constante pendant un instant, ou pendant l'élément dt du temps. Soit donc dv la vitesse élémentaire qu'elle

imprime au mobile pendant l'instant dt, et φ celle qu'elle lui imprimerait dans l'unité de temps, si au bout du temps t, ou à l'instant donné, elle devenait constante : on aura, comme ci-dessus, $dt : 1 :: dv : \varphi = \frac{dv}{dt}$, expression analogue à celle du numéro précédent. Ainsi,

1.° *L'action d'une force accélératrice quelconque d'un corps*, comparée à d'autres forces accélératrices, et considérée dans l'instant qu'on voudra, *se mesure par la vitesse égale qu'elle imprimerait, pendant l'unité de temps, à toutes les molécules du mobile, si elle devenait constante à l'instant que l'on considère*; et son expression est

$$[1] \ldots\ldots \varphi = \frac{dv}{dt},$$

ou, parce que $v = \frac{de}{dt}$ (77), et qu'on peut prendre dt constant,

$$[2] \ldots\ldots \varphi = \frac{d^2 e}{dt^2}.$$

La formule [1] et la précédente $v = \frac{de}{dt}$, qui, combinées ensemble, donnent

$$[3] \ldots\ldots v\,dv = \varphi\, de,$$

sont fondamentales dans la dynamique.

2.° Mais si l'on compare la force accélératrice à des forces une fois imprimées ou à des percussions, son action doit être mesurée (127) par

$$dv = \varphi\, dt.$$

En effet, l'action d'une force doit être supposée en raison directe de sa durée et de son intensité.

140. La FORCE MOTRICE *d'une masse quelconque est*, comme nous l'avons déjà fait remarquer (127), *la force nécessaire pour imprimer à cette masse la vitesse élémentaire qu'elle a prise, ou qu'elle tend à prendre.*

La FORCE DE PRESSION *est l'effort qu'un corps, en vertu d'une vitesse élémentaire qu'il a prise ou qu'il tend à prendre, est capable d'exercer contre un obstacle.*

141. Ainsi les forces motrices et les pressions sont entre elles, comme les produits des masses par les vitesses élémentaires (127). Or les vitesses imprimées dans un instant donné, sont proportionnelles aux forces accélératrices (139). Donc, si l'on prend une force motrice et une pression données pour les unités de leurs espèces,

1.° *L'action d'une force motrice, ou d'une pression quelconque*, comparée à d'autres forces motrices, ou à des pressions, ou à des

forces accélératrices, *est mesurée par le produit de la force accélératrice et de la masse;* et si on la désigne par p, et la masse du corps par m, on aura,

$$[1] \ldots . p = \varphi m, \text{ ou } p = m.\frac{dv}{dt}.$$

2.° Mais, si on la compare à l'action de forces une fois imprimées, ou à des percussions, *il faudra la mesurer par le produit de la masse et de la vitesse élémentaire*, et son expression sera (127),

$$[2] \ldots . pdt = mdv, \text{ ou } pdt = \varphi m dt.$$

La force motrice et la pression sont *constantes* ou *variables*, selon que la force accélératrice φ est elle-même constante ou variable.

142. 1.° L'équation $p = \varphi m$ donne cette autre,

$$[1] \ldots . \varphi = \frac{p}{m};$$

c'est-à-dire, *la force accélératrice d'une masse donnée est égale au rapport de la force motrice de cette masse, ou de la pression qu'elle exerce, à cette même masse.*

2.° Si p était l'expression de la force intérieure que la masse M exerce sur m à la distance R, on aurait (134, 1.°) $p = \frac{Mm}{R^2}$.

Cette valeur de p étant substituée dans $\varphi = \frac{p}{m}$, celle-ci deviendrait

$$[2] \ldots\ldots \varphi = \frac{M}{R^2},$$

comme cela doit être (133).

3.° Mais, les actions de deux corps étant toujours réciproques et égales (144), tandis que M attire ou repousse m avec la force p, m attire ou repousse aussi M, en sens contraire, avec une force égale à p. La force accélératrice que cette action de m fait naître dans M, est $= -\frac{m}{R^2}$. En transportant, en sens contraire, cette force accélératrice aux molécules de m, pendant que M sera supposée immobile, on ne changera rien à la vitesse avec laquelle la distance entre les deux masses M et m, est diminuée ou augmentée. Ainsi la masse m s'approche ou s'éloigne de M avec une force accélératrice égale à la somme des deux autres $\frac{M}{R^2}$, $\frac{m}{R^2}$, ou

$$[3] \ldots\ldots \varphi = \frac{M+m}{R^2}.$$

143. En comparant entre elles les expressions des forces accélératrice, motrice, de pression et de percussion, on voit,

1.° Que la force motrice diffère de la force accélératrice, comme une masse finie diffère d'un point matériel. En effet, celle-ci n'est que la force nécessaire pour imprimer une vitesse élémentaire à chacune des molécules de la masse en particulier : celle-là au contraire est la force qu'il faudrait pour imprimer cette même vitesse à la somme de toutes les molécules qui composent la masse donnée.

2.° Que la force motrice diffère de la force imprimée, et la pression de la percussion, comme l'élément de la vitesse diffère de la vitesse même. Ainsi les forces motrices et les pressions sont infiniment petites, par rapport aux forces imprimées et aux percussions. Cette vérité était connue d'Aristote (*Mechan. quæst.* 20).

3.° Cependant, conformément aux valeurs *$p\,dt$, $m\,dv$, la force motrice, ainsi que la pression, peut, en agissant continuellement sur un corps pendant un temps fini, engendrer et détruire une force imprimée.* C'est ainsi qu'un corps pesant acquiert bientôt, en tombant, une quantité finie de mouvement, quoiqu'au commencement de sa chute il n'ait eu qu'une force motrice. Un boulet de canon, lancé verticalement, commence par monter avec beaucoup de

vitesse ; mais la pesanteur, en le tirant sans cesse vers la terre, détruit bientôt tout son mouvement, et en produit un autre dirigé en sens contraire du premier. Si l'on met un corps pesant, par exemple, un morceau de plomb, sur une table fixée horizontalement, il ne fera que la presser, sans y produire aucun mouvement; mais si, par la pensée, on dépouille cette table de sa pesanteur, et qu'on écarte tous les obstacles qui pourraient s'opposer à sa chute, le morceau de plomb tombera vers la surface de la terre, et entraînera la table dans sa chute, quoiqu'il ne la presse pas avec plus de force que si elle était en repos. Enfin, nous voyons tous les jours des obstacles anéantir, par une simple pression, les forces les plus considérables dont nous puissions disposer.

144. Loi de l'ANTAGONISME. *Dans la communication du mouvement et de la tendance au mouvement, la réaction est toujours égale et directement opposée à l'action;* c'est-à-dire, que par quelque espèce de forces qu'un corps agisse sur un autre, ce second corps exercera en même temps sur le premier une action égale à celle qu'il en reçoit, et dirigée en sens contraire.

1.° *Cas où le mouvement est communiqué*

par une force extérieure. Toutes les manières dont une force extérieure peut agir, se réduisent à la percussion; car la pression n'est qu'une percussion exercée par un corps qui n'a qu'une vitesse élémentaire : pousser un corps, c'est le presser d'une manière continue; le tirer ou le traîner, c'est, quant à l'effet, la même chose que de le pousser en sens contraire. Il suffira donc d'examiner ici le cas de la percussion.

Supposons qu'un point matériel, dont la masse est M, se meuve dans l'espace absolu avec une vitesse représentée, en grandeur et en direction, par la droite AB (*fig.* 5), à laquelle nous rapporterons sa position dans l'espace relatif; et qu'un autre point matériel m soit en repos, en B, dans cet espace relatif: il est certain que m sera choqué par M. Imaginons aussi que la vitesse AB soit partagée en deux parties AE, BE, réciproquement proportionnelles aux masses M, m, en sorte que l'on ait : Fig. 5.

$$M : m :: BE : AE, \text{ ou } M.AE = m.BE.$$

Enfin concevons que la droite AD, avec les molécules M et m et l'espace relatif, soit transportée dans l'espace absolu, suivant la direction et avec la vitesse BE : ce mouvement n'altèrera en rien, ni le repos relatif de

m, ni le mouvement relatif de *M*. Mais le point *M* n'aura plus, dans l'espace absolu, que la vitesse *AE* et la quantité de mouvement $M \times AE$. D'une autre part, le point *m* aura, dans la direction contraire, par son mouvement dans l'espace absolu, une vitesse *BE* et une quantité de mouvement $m \times BE$. Donc, puisque par la supposition $M.AE = m.BE$, les deux points matériels *M* et *m* se feront équilibre en se choquant (128), et seront chacun par rapport à l'autre réduits au repos dans l'espace absolu. Mais l'espace relatif se meut encore après le choc, suivant la direction et avec la vitesse *BE*, dans l'espace absolu, et conséquemment par rapport aux points matériels *M*, *m*. Ainsi ces deux points, après le choc, se meuvent dans l'espace relatif, ou suivant la droite *AD*, avec la vitesse $BC = EB$ (90).

L'action exercée par le point *M* est mesurée par la quantité de mouvement $M \times AE$; celle qu'il produit, est $m \times BC$; la réaction du point *m* est $m \times BE$; son effet est la destruction de la quantité de mouvement $M \times AE$. Or toutes ces quantités sont égales entre elles, et $M \times AE$ est directement opposée à $m \times BE$.

Il est aisé de ramener tous les cas du choc

direct de deux corps; à celui que nous venons de considérer et de construire d'après le D.[r] *Kant*.

2.° *Cas où le mouvement est communiqué par une force intérieure.* Dans la dynamique on fait voir, sans supposer la loi de l'antagonisme, que, quelques actions que les parties d'un système quelconque exercent les unes sur les autres, l'état de repos ou de mouvement du centre de gravité de ce système n'en peut être altéré. D'ailleurs on sait que le centre de gravité de deux points matériels *Fig.* 5. A, B (*fig.* 5) est toujours en E, sur la droite qui joint ces deux points, et à une distance de chacun réciproque à sa masse; de sorte que

$$AE : BE :: B : A.$$

Si donc on estime les directions des mouvemens dans le sens EA, et que l'on fasse $EA = x$, $EB = -x'$, on aura $Ax = -Bx'$. Par conséquent, si le point A attire ou repousse le point B, en lui faisant parcourir le petit espace $\pm dx'$, il est impossible que A ne soit pas en même temps attiré ou repoussé dans le petit espace $\mp dx$, de sorte que $\mp A dx = \pm B dx'$. Donc aussi $\mp A d^2 x = \pm B d^2 x'$, ou $\mp \frac{A d^2 x}{dt} = \pm \frac{B d^2 x'}{dt}$

Or $\frac{d^2 x}{dt}$, $\frac{d^2 x'}{dt}$ sont les vitesses élémentaires imprimées aux points *A*, *B*, pendant l'élément constant dt du temps (77). Ainsi, en même temps que le point *B* est attiré vers *A*, ou repoussé de *A*, avec la force $\pm \frac{B d^2 x'}{dt}$, le point *A* est lui-même attiré vers *B*, ou repoussé de *B*, avec une force $\mp \frac{A d^2 x}{dt}$, égale et directement opposée. Donc les deux points matériels *A*, *B*, s'attirent, ou se repoussent, avec des forces égales et directement contraires.

Concevons, en effet, ces deux points unis entre eux par une droite *AB*, inflexible et sans masse. Si l'un des deux, par exemple *A*, attirait plus fortement l'autre vers *E*, qu'il n'est lui-même attiré vers ce même point *E*, cette droite presserait plus fortement *A* que *B*. Ainsi ces deux points et leur centre de gravité *E* seraient transportés dans l'espace, en vertu de leurs actions : ce qui est contraire au principe que nous avons supposé. Il est facile d'appliquer ce raisonnement au cas des forces répulsives.

3.° *Preuve commune aux deux cas.* Prenons deux points matériels dont les masses soient

M et *m*. « Nommons *p* l'action que *M* exerce « sur *m* au moyen d'une droite inflexible et « sans masse, qui est supposée unir ces deux « points. En concevant cette droite animée « de deux forces égales et contraires *p* et — *p*, « la force — *p* détruira, dans le corps *M*, « une force égale à *p*, et la force *p* de la « droite se communiquera tout entière au « corps *m*. Cette perte de force dans *M*, oc- « casionée par son action sur *m*, est (l'effet « de) ce que l'on nomme *réaction* de *m*. Ainsi, « dans la communication du mouvement, la « réaction est toujours égale et contraire à « l'action. » (*Mécan. cél.*, l. 1, n.° 14.)

« L'égalité de l'action et de la réaction se « manifeste dans toutes les actions de la na- « ture : le fer attire l'aimant, comme il en « est attiré. On observe la même chose dans « les attractions et dans les répulsions élec- « triques, dans le développement des forces « élastiques, et même dans celui des forces « animales; car, quel que soit le principe « moteur de l'homme et des animaux, il est « constant qu'ils reçoivent par la réaction « de la matière une force égale et contraire « à celle qu'ils lui communiquent, et qu'ainsi, « sous ce rapport, ils sont assujettis aux « mêmes lois que les êtres inanimés. » (*Expos.*

du Syst. du monde, l. 3, ch. 3.) En effet, si je presse une pierre avec la main, celle-ci en sera également pressée : si je soutiens, ou que je traîne, ou que je fasse tourner un corps attaché à une corde, cette corde sera également tendue à ses deux bouts, et je me sentirai entraîné vers le corps, comme il est entraîné vers moi, etc.

145. Il résulte des développemens précédens,

1.° Qu'il ne faut pas, avec quelques auteurs, regarder la loi de l'antagonisme comme une généralisation de la loi de l'inertie (112). La véritable généralisation de celle-ci est le principe connu sous le nom de *conservation du mouvement du centre de gravité.* Mais l'inertie et l'antagonisme expriment des idées entièrement différentes : l'inertie exprime l'impuissance où est l'individu matériel de modifier son propre état, d'agir sur lui-même; et l'antagonisme caractérise la nécessité où il se trouve d'agir sur tous ceux qui agissent sur lui-même. Or cette nécessité d'agir, dans un corps qui a subi une action de la part d'un autre, ne peut pas naître précisément de son impuissance à agir sur lui-même.

2.° *Que l'égalité de l'action et de la réaction ne suppose pas, dans la matière, une force*

particulière, à laquelle on a donné, d'après Kepler et Newton, le nom de *force d'inertie*. Cette dénomination est non-seulement contradictoire, mais même dangereuse en mécanique : car donner, avec quelques auteurs, le nom de force à la propriété qu'ont les corps de persévérer dans leur état de repos ou de mouvement, c'est réunir deux idées opposées (113, 114) et abuser des termes. Cet abus peut faire confondre l'inertie avec l'antagonisme, et induire en erreur les personnes encore trop peu au fait des lois de la mécanique, en leur permettant de penser qu'un corps en mouvement ne peut mouvoir un autre qu'on regarde comme en repos, sans commencer par perdre une partie de son mouvement à vaincre l'inertie de cet autre, et que ce n'est qu'avec ce qui lui en reste ensuite qu'il peut le mouvoir ; de sorte que, s'il ne lui en restait rien, il ne pourrait y produire aucun mouvement : ce qui est contraire à l'explication du premier cas (144), de laquelle il suit que le moindre corps, mu avec la moindre vitesse, doit, en en choquant un autre, lui communiquer une quantité de mouvement égale à la sienne.

On pourrait sans doute éviter ces erreurs, en ne comprenant sous le nom de *force*

d'inertie, que la force qu'un corps exerce contre tout autre corps qui change ou tend à changer son état de repos ou de mouvement : mais il faut convenir qu'on n'imagine cette *force d'inertie*, que pour expliquer l'action qu'exerce un corps que nous jugeons en repos. Ainsi cette force d'inertie n'aurait jamais d'autre effet que de détruire des mouvemens, sans jamais pouvoir en produire aucun : elle serait donc une force toute particulière, *sui generis*. Mais la supposition d'une pareille force n'est-elle pas contraire aux règles de la philosophie (18)?

Pour concevoir la résistance qu'opposent à leur changement d'état les corps que nous jugeons en repos, ne vaut-il pas mieux, comme nous l'avons fait d'après MM. *de la Place* et *Kant*, supposer que le corps choqué soit animé de deux mouvemens égaux et directement contraires? Peut-on, en effet, bien concevoir qu'un corps détruise, en tout ou en partie, le mouvement d'un autre, sans qu'il ait lui-même un mouvement opposé, ou du moins une tendance à ce mouvement? Et la supposition de deux mouvemens contraires dans le corps choqué, ou, ce qui revient au même, la supposition d'un mouvement du corps choqué et de l'espace

relatif dans un sens opposé à celui du corps choquant, n'est-elle pas justifiée, peut-être même nécessitée, par la nature de la question? Car, enfin, on ne considère les deux corps que sous le rapport de l'influence que chacun peut avoir sur le changement de l'état de l'autre : ainsi on peut faire abstraction de tous les autres corps de la nature, pour n'avoir égard qu'à la ligne droite qui joint les deux corps en question. Or tous les changemens qui arrivent suivant cette droite, ou dans l'espace absolu, sont réciproques entre eux; et il n'y a plus aucune raison pour attribuer plus de part à l'un qu'à l'autre, dans le mouvement que l'on attribuait uniquement à l'un des deux dans l'espace relatif. Pour exprimer cette condition, il faut supposer des quantités égales de mouvement aux deux corps, comme nous l'avons fait dans le numéro précédent.

Il est aisé de voir que cette supposition ramène tous les cas du choc des corps à celui du choc de deux corps qui se heurtent suivant des directions contraires; mais elle n'explique pas la manière dont le mouvement se communique d'un corps à l'autre. Comment se fait donc cette communication? Les opinions sur ce sujet paraissent se réduire à

deux capitales; et toutes deux s'opposent le nom et l'autorité de deux des plus profonds philosophes de notre siècle, et qui se sont d'ailleurs plus d'une fois rencontrés sur les points les plus épineux de la métaphysique.

M. *de la Place* pense que cette communication se fait par une sorte de *transfusion ;* « qu'elle résulte de ce qu'un corps ne peut « acquérir du mouvement, par l'action d'un « autre corps, sans l'en dépouiller, de même « qu'un vase se remplit aux dépens d'un vase « plein qui communique avec lui. » Le D.r *Kant*[1] et ses disciples rejettent cette explication, et prétendent, 1.° que ce passage du mouvement d'un corps dans un autre est contraire à ce principe de métaphysique, que *les accidens ne passent pas d'une substance dans une autre ;* 2.° qu'il n'explique pas la réaction qui, dans cette communication, a lieu entre les corps ; 3.° qu'il n'explique même rien, parce que c'est la possibilité de ce passage même qu'il s'agit d'expliquer.

Ce sont ces deux dernières raisons que les *Kantiens* font valoir avec le plus de confiance contre le système de la transfusion ;

---

1. *Metaphys. Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, 2.e édit. Riga 1787, 8.°, pag. 130.

mais elles ne leur sont pas aussi favorables qu'ils le prétendent. Car, 1.°, il ne s'agit plus ici d'expliquer la réaction : dans le cas de la communication du mouvement par des forces extérieures, nous avons fait remarquer que l'explication de M. *de la Place* repose sur le même fondement que la construction, donnée par M. *Kant*, de la loi de l'antagonisme (144, 1.°) ; quant à la réaction des corps animés par des forces intérieures, les Kantiens n'ont rien de particulier à ce sujet. 2.° La difficulté d'expliquer le passage du mouvement d'un corps dans un autre, tient à celle de concevoir clairement la manière d'agir des forces, et la génération du mouvement (115). Or M. *Kant*[1] lui-même regarde cette dernière difficulté comme insurmontable.

M. *Kant* et ses disciples expliquent l'antagonisme, en supposant des forces répulsives et attractives qui, suivant eux, constituent l'essence de la matière (42) : dans leur système, les forces répulsives des corps deviennent efficaces, dès que ces corps commencent à se presser ; d'où il suit que deux corps qui se choquent doivent nécessairement agir l'un sur l'autre. Mais la supposition des forces

---

1. *Critik der reinen Vernunft ; 2.° Analogie der Erfahrung.*

répulsives n'explique pas mieux cette double action, que ne le fait celle des mouvemens directement opposés dans les corps qui se choquent : elle deviendrait même ridicule, si elle ne devait servir qu'à expliquer la loi de l'antagonisme. Aussi les *Kantiens* prétendent-ils qu'on peut dériver toutes les propriétés de la matière, de la combinaison de ces forces répulsives et attractives, et de leurs différens rapports à nos facultés de recevoir des sensations. Mais peuvent-ils se flatter de jamais justifier ces prétentions ? et leur *physique dynamique* se prêtera-t-elle moins, que la *physique atomistique*, aux suppositions les plus arbitraires ?

146. De quelque manière qu'on explique la communication du mouvement d'un corps à un autre, on voit que, pendant cette communication, *les corps sont tous deux actifs et tous deux passifs* : tous deux *actifs*, parce que chacun d'eux imprime du mouvement à l'autre; tous deux *passifs*, parce qu'ils reçoivent du mouvement l'un de l'autre. Cependant, dans le cas du choc de deux corps, ce n'est ordinairement qu'à celui des deux qui a la plus grande quantité de mouvement dans l'espace relatif, qu'on donne le nom de *force* ou de *force active;* pour l'autre, on l'appelle

résistance, et quelquefois aussi *force passive*: mais cette dernière dénomination ne paraît pas heureuse.

147. Cependant on divise ordinairement les forces en *actives* et en *passives*.

« On entend par *forces actives*, les forces « que les corps exercent les uns sur les au- « tres, et dont l'effet est de changer leurs « distances ou leurs positions respectives, « comme les forces intrinsèques d'attraction « ou de répulsion, les forces des ressorts « placés entre les corps, etc.

« Au contraire, on appelle *forces passives*, « les forces de résistance produites par les « pressions des corps, les tensions des fils « ou des verges, etc., et dont l'effet est de « maintenir les corps dans une même posi- « tion respective, et d'empêcher que les con- « ditions du système ne soient violées. » (M. *de la Grange, Théorie des fonct. analyt.* n.° 222).

CHAPITRE III.

Résultats de l'observation et de l'expérience sur la pesanteur à la surface de la terre.

148. I.er Résultat. Dans les environs de la terre, *chaque molécule de matière tend à tomber vers elle, et tombe réellement, si elle n'est retenue par aucun obstacle.* Ce ne sont pas seulement les grandes masses qui jouissent de cette propriété; car, en quelque nombre de parties qu'on les divise, chacune de ces parties fait effort pour tomber, et tombe aussitôt qu'on écarte les obstacles qui s'opposaient à sa chute.

149. C'est *la cause de cette tendance qu'a chaque point matériel à tomber vers la terre,* qu'on appelle PESANTEUR, *gravité, force attractive* terrestre.

Cependant il semble qu'on doit attacher des idées différentes à ces différens mots. En effet, la *gravité,* ou la *pesanteur absolue* d'un corps placé dans les environs de la terre, est la résultante des forces attractives de la terre et des autres astres sur chaque point matériel de ce corps. Mais par *pesanteur* simplement

on a coutume d'entendre la résultante de cette gravité et de la force centrifuge qui provient du mouvement diurne de la terre autour de son axe : car c'est l'effet combiné de ces forces que nous observons, et qui sert de mesure à la force qu'on est dans l'usage de nommer simplement *pesanteur*.

150. La *direction de la pesanteur*, c'est-à-dire, la droite suivant laquelle tombe une molécule de matière abandonnée à elle-même, se nomme VERTICALE. On fait voir dans l'Hydrostatique, que cette droite est partout perpendiculaire à la surface libre des eaux stagnantes et tranquilles; de sorte que, si la terre était un globe parfaitement sphérique, toutes les directions de la pesanteur seraient dans ses rayons, et concourraient à son centre.

On dit qu'*un plan* est HORIZONTAL *lorsqu'il est perpendiculaire à une droite verticale.* Tout plan horizontal est donc parallèle à la surface supérieure des eaux stagnantes.

151. II.ᵉ RÉSULTAT. Dans les environs de la terre, *les corps qui sont peu éloignés les uns des autres, tombent, ou tendent à tomber, suivant des directions sensiblement parallèles entre elles.* C'est ce que l'on observe quand on laisse tomber à la fois quelques balles de plomb du même plan horizontal. Mais il est

plus aisé de s'en convaincre, en suspendant ces balles, dans un air calme, à des fils bien flexibles; car on voit aussitôt que les tensions de ces fils sont sensiblement parallèles. Or ces tensions sont les directions mêmes de la pesanteur (118).

On sait que la figure de la terre diffère assez peu de celle d'une sphère dont la circonférence d'un grand cercle est de 40 000 000 mètres. D'où il suit que les directions de la pesanteur de deux corps, éloignés l'un de l'autre de 1000 mètres sur la surface de la terre, ne font entre elles qu'un angle d'environ une minute centésimale; et par conséquent, à la distance horizontale de plusieurs milliers de mètres, elles peuvent, dans beaucoup de cas, être supposées parallèles.

152. III.e Résultat. *L'intensité de la pesanteur ne varie que très-peu par les plus grands changemens qu'il est en notre pouvoir d'introduire dans les distances des corps à la terre.* On sait par la dynamique, qu'on peut, par le moyen du pendule, trouver la mesure exacte de la pesanteur. Or les observations faites avec cet instrument ne laissent apercevoir qu'une petite diminution dans la pesanteur, depuis le niveau de la mer jusqu'au sommet des plus hautes montagnes. Ainsi

Bouguer a trouvé que la pesanteur à l'équateur, et au niveau de la mer, étant exprimée par l'unité, elle est 0,998816 sur le sommet du Pichincha, élevé de 4744 mètres au-dessus de ce niveau. La diminution, dans cet exemple, n'est donc que de 0,001184. Il est vrai que les circonstances locales paraissent avoir contribué à rendre cette diminution moins sensible ; car le rayon de l'équateur étant = 6378150 mètres, la pesanteur sur le Pichincha serait, d'après la loi (133), = 0,998514 ; par conséquent sa diminution, depuis le niveau de la mer, = 0,001486. Mais cette quantité même est assez peu considérable.

153. IV.ᵉ Résultat. *Tous les corps*, si on les abandonne à eux-mêmes dans le même lieu de la terre, *tombent des mêmes hauteurs dans le même intervalle de temps.*

Ainsi *l'intensité de la pesanteur ne dépend, ni de la nature, ni de la masse, ni du volume, ni de la forme du corps : elle est la même pour toutes les molécules de matière.*

Car, 1.°, *Galilée*, auteur de cette découverte, *Mersenne*, *Riccioli* et *Grimaldi*, *Newton* et *Desaguilliers*, en laissant tomber différens corps de très-grandes hauteurs, et en tenant compte de la résistance de l'air, ont trouvé des résultats entièrement conformes à celui

que nous venons d'énoncer. 2.° *Newton* (*Princ. math. l.* 2, *sect.* 6, *schol. gén.*) « a fait « osciller un grand nombre de corps de « même poids, et différens, soit par la figure, « soit par la matière, en les plaçant dans « l'intérieur d'une même surface, afin que « la résistance de l'air fût la même. Quelque « précision qu'il ait apportée dans ses expé- « riences, il n'a point remarqué de diffé- « rence sensible entre les durées des oscilla- « tions de ces corps : d'où il suit que, sans « les résistances qu'ils éprouvent, leur vitesse, « acquise par l'action de la pesanteur, serait « la même en temps égal. » (*Expos. du syst. du monde, l.* 3, *c.* 2.) *Galilée* avait déjà confirmé sa découverte par des expériences du même genre. 3.° Enfin, *Desaguilliers*, *s'Gravesande*, *Mussenbrœck*, *Nollet*, etc., ont prouvé que, dans des tubes de 4 ou 5 mètres de hauteur et vides d'air, des corps différens par leur matière, leur masse et leur volume, tombent du haut au bas dans le même espace de temps.

Démocrite, *Épicure* et *Lucrèce*, avaient déjà entrevu cette vérité; et il nous semble aujourd'hui qu'il était facile d'y arriver. Car si on laisse tomber, au même instant et du même endroit, deux corps parfaitement égaux, par exemple, deux balles de plomb qui ne soient

pas attachées ensemble ; il est certain qu'elles auront des vitesses parallèles (151) et égales entre elles, puisqu'il n'y a aucune raison pour que l'une tombe plus ou moins vite que l'autre. Aucune d'elles ne pourrait donc accélérer ou retarder le mouvement de l'autre, quand elles seraient attachées ensemble. Ainsi, en vertu de la pesanteur, le système de ces deux balles aurait à chaque instant la même vitesse qu'aurait chacune d'elles séparément, et tomberait par conséquent de la même hauteur dans le même temps. Mais on peut étendre ce raisonnement à un nombre quelconque de balles. On voit donc qu'abstraction faite de la résistance de l'air, la masse, le volume et la forme d'un corps n'influent pas sur la durée de sa chute d'une hauteur donnée.

154. Cependant, pour que ce résultat soit bien exact,

1.° Il faut supposer les masses des corps que l'on fait tomber, incomparablement plus petites que celle de la terre (142, 3.°). Cette supposition est toujours permise en physique : car le rayon moyen de la terre étant de 6 366 198 mètres, le nombre qui exprimerait le volume de la terre en mètres cubes entiers, serait composé de vingt-un chiffres ; ainsi dans

toute hypothèse vraisemblable sur la densité moyenne de la terre, la masse de celle-ci peut être regardée comme infinie relativement à celles des corps que nous pouvons mettre en mouvement.

2.° Il faut encore que les expériences sur la chute des corps se fassent dans le même lieu de la terre, ou qu'on ait du moins égard à la hauteur au-dessus du niveau de la mer (152), et à la différence de latitude des lieux: car, en allant de l'équateur aux pôles, la pesanteur augmente par deux raisons, 1.° parce que la distance au centre de la terre diminue; 2.° parce que la force centrifuge, qui naît de la rotation de la terre autour de son axe, et qui détruit une partie de la pesanteur, devient et plus petite et moins opposée à la pesanteur.

155. Il suit des résultats précédens, qu'aux environs de la surface de la terre et dans le même lieu, la pesanteur agit continuellement, avec la même intensité et suivant des directions sensiblement parallèles, sur tous les points matériels qui sont en repos, ou même en mouvement à partir du même instant. Mais pour nous convaincre qu'elle agit de la même manière sur les corps en repos et sur les corps en mouvement à partir d'ins-

tans quelconques, nous allons donner une légère idée de la machine que le D.r *Atwood* a imaginée pour cet objet.[1]

A (*fig.* 11) est une poulie très-légère et très-mobile autour d'un axe qui traverse son centre, et d'un diamètre d'environ 20 centimètres. *B, C* sont deux cylindres de cuivre, égaux entre eux, que l'on charge à volonté de poids égaux : ils sont attachés par des crochets à un cordon *DEF*, assez fin, très-flexible, et qui passe dans la gorge de la poulie *A*. G est un petit cylindre, aussi de cuivre, auquel on a pratiqué une entaille, afin qu'on puisse y passer la tige du crochet du cylindre *B*. *H* est un parallélipipède du même métal et du même poids que *G*, et auquel on a fait également une entaille qui va jusqu'à son centre, pour recevoir le crochet de *B*. *KL* est un long soliveau, bien droit, fixé dans une position verticale, et dont la face tournée vers la poulie est divisée, dans sa longueur, en un certain nombre de parties égales; les limites de ces parties sont marquées par les caractères 0, 1, 2, 3, etc. Enfin *Fig.* 11.

1. *A Treatise on the rectilinear motion and rotation of bodies, with a description of original experiments. Cambridge*, 1784, 8.°

I est un anneau de cuivre, fixé par une queue au soliveau *KL*, de manière que son plan supérieur soit au-dessus de la division 1, d'une quantité égale à la longueur de l'axe de *B*, et que cet axe prolongé passe par le centre de l'anneau. Cet anneau doit être d'un diamètre assez grand pour laisser passer librement les cylindres *B*, *G*, et assez petit pour intercepter le parallélipipède *H*.

Pour diminuer le frottement de l'axe de la poulie, l'auteur fait porter chacune de ses extrémités sur deux circonférences de cercle, à peu près comme dans la machine dont *Nollet* se servait pour comparer entre eux les frottemens de la première et de la seconde espèce. Mais c'est dans son ouvrage même qu'il faut voir la description de cette ingénieuse machine, et le détail des précautions qu'il faut prendre pour en obtenir des résultats exacts dans les expériences.

Tant que les poids égaux *B*, *C* sont seuls suspendus au cordon *DF*, et que l'on fait abstraction du poids de celui-ci, ils doivent se faire équilibre : mais lorsque sur le cylindre *B* on mettra le petit poids *G* ou *H*, alors (abstraction faite du frottement et du poids de la poulie, du poids du cordon, etc.) le cylindre *B*, en vertu de ce petit poids, des-

cendra et forcera le poids C à monter. Ainsi le petit poids G ou H sera seul la force motrice des masses des corps B, C, G. Désignant donc par g la pesanteur d'un corps libre, et par g' la pesanteur dans cette machine, c'est-à-dire, la force accélératrice de ces trois masses ; on aura (n.° 142) $g' = \frac{B - C + G}{B + C + G} g$; ou, parce que, par l'hypothèse, $B = C$, on aura $g' = \frac{Gg}{2B + G}$, ou

$$g' : g :: G : 2B + G.$$

A la latitude de Paris, un corps grave et libre parcourt, dans le vide, un espace d'environ 49,044 décimètres dans la première seconde de sa chute, ou $\frac{1}{2} g = 49{,}044$ décimètres. Si l'on prend donc le petit poids G, tel qu'on ait $G : 2B + G :: 1 : 49{,}044$, ou $G : B :: 1 : 24{,}022$, $\frac{1}{2} g'$ ne sera que d'un décimètre environ ; et en faisant les intervalles 0,1 ; 1,2 ; 2,3 ; etc., chacun d'un décimètre, on pourra mesurer le temps de la descente du poids B, par les oscillations d'un pendule qui batte les secondes : et c'est ce que nous supposerons dans les expériences suivantes.

156. V.° Résultat. *Les hauteurs d'où les corps tombent librement, en partant du repos,*

sont entre elles comme les carrés des temps comptés du premier instant de la chute. Si l'on nomme $\frac{1}{2} g$ l'espace parcouru pendant la première unité de temps, et h la hauteur d'où le corps est tombé pendant le temps t; on aura toujours

$$h = \frac{1}{2} g t^2.$$

Car si l'on dispose d'abord le fil DF de manière que la base inférieure du cylindre B soit dans le même plan horizontal que la division 0, et qu'on mette ensuite le petit poids G sur ce cylindre, l'équilibre sera rompu; et l'on observera que, si à la fin de la première seconde la base du cylindre B répond à la division 1, à la fin de la seconde elle répondra à la division 4; à la fin de la troisième, à la division 9, etc. Par conséquent les espaces 1, 4, 9, etc., parcourus en vertu de la pesanteur relative dans cette machine, croissent comme les carrés des temps 1, 2, 3, etc. Mais cette pesanteur relative g' est à la pesanteur absolue g, dans le rapport constant de $G : 2B + G$, pourvu qu'on fasse abstraction de la résistance de l'air, etc. Donc les espaces parcourus en vertu de la pesanteur absolue, croissent comme les carrés des temps.

157. VI.ᵉ Résultat. *Un corps qui se mou-*

vrait uniformément en vertu de la vitesse acquise en tombant librement d'une hauteur quelconque donnée, décrirait, dans un temps égal à celui de sa chute, un espace double de cette hauteur. Ainsi, nommant v la vitesse acquise par le corps en tombant pendant le temps t de la hauteur h, on aura (73)

$$v = \frac{2h}{t}.$$

Ayant, comme dans l'expérience précédente, placé le cylindre B de manière que sa base inférieure soit dans le même plan horizontal que la droite marquée o, mettez le petit poids H sur la tête de ce cylindre: tous deux descendront ensemble, et, à la fin de la première seconde, la base du cylindre se trouvera dans le plan horizontal passant par la droite marquée 1. Mais alors le parallélipipède H s'arrêtera sur l'anneau I: par conséquent le cylindre B, dont le poids est sans cesse contrebalancé par celui du cylindre C, ne descendra plus qu'en vertu de sa vitesse acquise pendant la première seconde, en tombant de la hauteur o 1. Or l'on remarquera qu'à la fin de la seconde unité de temps, la base du cylindre B répondra à la division 3; à la fin de la troisième, à la division 5, etc. Donc, en vertu de la vitesse ac-

quise en tombant de la hauteur $o\,1$ pendant la première seconde, le cylindre B parcourt uniformément, dans les secondes suivantes, des espaces doubles chacun de cette hauteur.

158. Donc, dans les environs de la surface de la terre,

1.° *Les vitesses que les corps acquièrent en tombant librement, croissent comme les temps des chutes* : car en égalant les deux valeurs de h trouvées plus haut (156, 157), on en tire $g\,t = v$, ou

$$g : v :: 1'' : t.$$

Or g, étant le double de l'espace parcouru en vertu de la pesanteur pendant la première unité de temps, exprime la vitesse acquise pendant cette unité de temps (157). Pareillement v est la vitesse acquise pendant le temps t. Donc les vitesses engendrées par la pesanteur, sont proportionnelles aux temps.

2.° Par conséquent, *la pesanteur*, à la surface de la terre, *est une force accélératrice constante* (136), mesurée par la vitesse g qu'un corps grave acquiert en tombant librement pendant l'unité de temps (137).

3.° *La pesanteur agit donc continuellement, et de la même manière, sur les corps dans leur état de repos et dans leur état de mouvement.*

159. Nous sommes donc suffisamment autorisés à *regarder la pesanteur terrestre comme résultante, pour la plus grande partie, d'une force intérieure dont l'origine est à peu près au centre de la terre:* car, en partant de ce point, elle agit dans toutes les directions (150), sans interruption (158), également sur tous les corps (153), indépendamment de leur état de repos ou de mouvement, placés à des distances quelconques (152). En effet, la pesanteur ne diminuant que très-peu depuis le niveau de la mer jusqu'au sommet des plus hautes montagnes, il est naturel de penser que son action s'étend à des distances incomparablement plus considérables. L'astronomie met cette conséquence hors de doute, et prouve en même temps que la pesanteur agit suivant la loi (133).

160. Deux des quatre quantités g, v, h, t, c'est-à-dire, de la pesanteur, de la vitesse, de la hauteur et de la durée de la chute, étant données, on pourra toujours trouver les deux autres; car les deux équations $h = \frac{1}{2}gt^2$ (156), $v = \frac{2h}{t}$, donnent les douze suivantes :

[1] . . . $g = \frac{v}{t}$.	[7] . . . $h = \frac{1}{2} vt$.
[2] . . . $g = \frac{2h}{t^2}$.	[8] . . . $h = \frac{1}{2} gt^2$.
[3] . . . $g = \frac{v^2}{2h}$.	[9] . . . $h = \frac{v^2}{2g}$.
[4] . . . $v = gt$.	[10] . . . $t = \frac{v}{g}$.
[5] . . . $v = \frac{2h}{t}$.	[11] . . . $t = \frac{2h}{v}$.
[6] . . . $v = \sqrt{2gh}$.	[12] . . . $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

A l'observatoire de Paris, $g = 9^{m}, 80879\ 5248$.
Logarithme $g = \ldots\ldots\ldots 0,99161\ 56690$.

161. Nous avons vu (153) que, dans le même lieu de la terre, tous les points matériels tendent à tomber avec la même vitesse. *La somme de ces tendances, qui naissent de l'action instantanée de la pesanteur sur la somme des molécules d'un corps, est ce qui constitue le* POIDS *de ce corps.*

Ainsi, dans le même lieu de la terre, *les poids des corps sont proportionnels à leurs masses;* et si l'on désigne par p le poids d'un corps dont la somme des molécules est m, g étant la pesanteur accélératrice ou le poids d'un point matériel (137, 158, 2.°), on aura

$$p = gm,$$

expression conforme à celles des forces motrices et des pressions (141). Aussi mesure-t-on (127) le poids d'un corps par l'effort que fait ce corps pour tomber lorsqu'il est retenu ou supporté par quelque obstacle.

162. VII.[e] RÉSULTAT. *Les corps de différentes espèces ont des poids différens sous des volumes égaux.* Tout le monde sait que, sous le même volume, les métaux pèsent plus que les pierres, que les bois, etc.; que l'or pèse plus que l'argent, l'argent plus que le fer, etc.

163. Pour établir, aussi sous ce point de vue, des comparaisons entre les corps de différentes espèces, on prend, pour l'unité des poids, le poids d'une matière quelconque sous un volume donné et pris aussi pour l'unité des volumes: par exemple, on prend le poids absolu du cube de la centième partie du mètre, en eau distillée et considérée dans son *maximum* de densité. Le poids d'un corps quelconque sous cette unité de volume, est ce que l'on nomme sa *pesanteur spécifique*, son *poids spécifique;* ou, parce que les poids de deux corps, mécaniquement homogènes chacun, gardent toujours entre eux le même rapport, tant que celui des volumes reste constant (37, 161), la PESANTEUR SPÉCIFIQUE *d'un corps est le rapport de son poids à celui*

« tombe d'un mouvement que l'expérience ap-
« prend être *uniformément accéléré.* C'est la
« vitesse qu'il acquiert ainsi pendant un cer-
« tain temps, divisée par ce temps, qui mesure
« la *pesanteur :* cette pesanteur est la *force*
« *accélératrice.* C'est le produit de cette pe-
« santeur par la masse du corps, qui repré-
« sente le *poids* de ce corps »; et cette même quantité, si on la regarde comme la mesure de l'effort qu'un corps solide peut faire en vertu de la vitesse élémentaire qu'il a prise ou qu'il tend à prendre, constitue ce qu'on nomme *pression :* mais si on la considère comme la mesure de la force nécessaire pour imprimer cette même vitesse, elle est alors ce qu'on appelle *force motrice.*

167. En terminant ce chapitre, nous allons rappeler ou établir les mesures auxquelles on peut rapporter les différentes espèces de quantités qui entrent dans les formules de la Mécanique. On voit maintenant que les principales espèces de ces quantités sont au nombre de cinq : 1.° l'espace parcouru par le corps en mouvement; 2.° le temps employé à parcourir cet espace ; 3.° la vitesse du mobile ; 4.° la force qui l'a mis ou tend à le mettre en mouvement; 5.° la masse du mobile, qui est liée par certains rapports à son vo-

lume, à sa densité, et à son poids, tant absolu que spécifique (165).

168. *On peut prendre le* MÈTRE *pour l'unité des mesures linéaires,* et n'employer ensuite d'autres mesures linéaires que ses multiples et sous-multiples décimaux. On sait que le mètre est la dix-millionième partie du quart de la circonférence qui aurait le même rayon que le degré du méridien terrestre, coupé dans son milieu par le parallèle moyen entre le pôle boréal et l'équateur : il est égal à *cinq cent treize mille soixante-quatorze millionièmes parties* de la toise de fer qui a servi à mesurer le degré du méridien à l'équateur, prise à la température de seize degrés et un quart au thermomètre à mercure, divisé en cent degrés, depuis la température de la glace fondante jusqu'à celle de l'eau bouillante, sous une pression équivalente au poids d'une colonne de mercure de soixante-seize centimètres de hauteur. Ainsi le mètre $=0,513074$ toises, $=3,078444$ pieds-de-roi, $=443,296$ lignes. Le décimètre, le centimètre, le millimètre, etc., sont la dixième, la centième, la millième, etc., partie du mètre. Le décamètre, l'hectomètre, le kilomètre, le myriamètre, etc., valent dix mètres, cent mètres, mille mètres, dix mille mètres, etc.

Nous allons ajouter ici une double table, calculée d'après celles qui se trouvent dans *Ephem. astron.* de Vienne pour 1797, et dans le premier volume de l'ouvrage de M. *Mayer, Gründlicher Unterricht zur praktischen Geometrie*, Göttingen, 1792, 4 vol. 8°.

TABLE de différentes mesures linéaires, rapportées au mètre *divisé en* 100 000, *et au* pied-de-roi *divisé en* 14 400 *parties égales.*

NOMS DES MESURES.	MÈTRE = 100 000.	PIED-DE-ROI. = 14 400.
Pied d'Alexandrie	35 708	15 829
— d'Amsterdam	28 356	12 570
— Arabe	26 804	11 882
— d'Ausbourg	29 777	13 200
— de Bâle	29 914	13 260
— de Bavière	29 186	12 938
— de Berlin	30 973	13 730
— de Berne	29 664	13 150
— de Bohême	29 639	13 139
— de Bologne	38 033	16 860
Aune de Castille	83 691	37 100
Pied de Chine	31 972	14 173
— de Cologne	27 499	12 190
— de Constantinople	70 833	31 400
— de Florence	55 063	24 409,4
— de Francfort sur le Mein	28 583	12 700
— de Genève	48 794	21 630
— des anciens Grecs	30 783	13 646
Coudée des Hébreux	53 773	23 840
Pied de Leipzig	28 263	12 529
— de Lisbonne	31 300	13 875
— de Londres	30 489	13 515,8
— de Milan	59 554	26 400
— de Moravie	33 414	14 812
Palme de Naples	26 204	11 615
Pied de Nuremberg	30 379	13 467
— de Prague	30 138	13 360
— du Rhin	31 385	13 913
— des anciens Romains	30 206	13 390
— des Romains modernes	22 339	9 903
— de Roterdam	31 209	13 835
— de Roi	32 485	14 400
— de Russie	53 815	23 856
— de Salzbourg	29 668	13 151,5
— de Silésie	28 873	12 829
— de Strasbourg	28 922	12 820,8
— de Suède	29 698	13 165
— de Turin	51 365	22 770
— de Venise	34 740	15 400
— de Vienne en Autriche	31 610	14 012,7
— de Zurich	30 003	13 300

169. Pour l'unité des surfaces, on peut prendre le carré, dont le côté est ou le mètre, ou un multiple ou un sous-multiple décimal du mètre; et pour l'unité des volumes, le cube de la mesure linéaire, dont le carré est l'unité des surfaces.

Dans le système de nos nouvelles mesures, l'unité des mesures superficielles pour le terrain, est le mètre carré : on l'appelle *are.* L'unité des mesures de capacité est le cube du décimètre : on la nomme *litre.* Enfin, la mesure, particulièrement destinée au bois de chauffage, est égale au mètre cube; et on lui donne le nom de *stère.*

170. *Le gramme* peut être adopté pour l'unité des poids : « c'est le poids absolu du « cube de la centième partie du mètre, en « eau distillée et considérée à son *maximum* « de densité » (ce qui a lieu vers le 4.e degré du thermomètre centigrade). M. Lefèvre-Gineau, membre de l'Institut national, « a « déterminé le gramme par une longue suite « d'expériences délicates sur la pesanteur spé- « cifique d'un cylindre creux de cuivre, dont « il a mesuré le volume avec un soin extrême : « il en résulte que la livre, supposée la vingt- « cinquième partie de la pile de cinquante « marcs, que l'on conserve à la monnaie de

« Paris (sous le nom de pile de Charlemagne),
« est au gramme dans le rapport de 489,5058
« à l'unité. » (*Exposit. du Syst. du monde, L.* 1, *Ch.* 12.)

Ainsi, la livre valant 9216 grains, le gramme vaut 18,82715 grains. Cependant, dans la table qui suit, et qui a été calculée d'après les valeurs données par M. *Tillet*, dans les Mém. de l'Acad. des Scienc. 1767, on a supposé le gramme = $18{,}830\frac{1}{3}$ grains, parce que c'est là sa valeur comparée à celles trouvées par M. *Tillet* (*Geogr. Ephem. von Zach, Jul.* 1799).

Le mètre cube d'eau distillée, à son *maximum* de densité, pèse un million de grammes, et le pied cube pèse 70 livr. 223 grains = 34277,251 grammes.

Le décagramme, l'hectogramme, le kilogramme, etc., valent dix grammes, cent grammes, mille grammes, etc. Le décigramme, le centigramme, etc., valent la dixième, la centième, etc., partie du gramme.

TABLE de différens poids comparés au **kilogramme** *divisé* en 100 000 *centigrammes, et à la livre de Troyes partagée en* 9216 *grains.*

NOMS DES POIDS.	KILOGR. = 100 000.	LIVR. DE TR. = 9216.
Berlin; marc de 8 onces	23 409	4408
Berne; poids des orfèvres, de 8 onc.	24 684	4648
— livre du commerce, de 16 onc.	52 224	9834
— poids des apothicaires, de 8 onc.	23 653	4454
Bonn; marc de 8 onc. (réputé de Colog.)	23 360	4398¾
Bruxelles; livre (de Troyes)	49 166	9258
— — marc réputé de Bruxelles.	24 599	4632
Cologne; marc de 8 onces	23 382	4403
Constantinople; cheki de 100 drachmes	31 885	6004
Copenhague; marc des orfèv. de 8 onc.	23 569	4438⅓
— — marc du commerce de 8 onc.	24 973	4702½
Dantzig; marc (réputé de Cologne). .	23 343	4395½
Dresde; marc de 8 onces.	*id.*	*id.*
Florence; livre (des anciens Romains)	33 945	6392
Gènes; livre *peso sottile*	31 704	5970
— — — — *grosso*	31 763	5981
Hambourg; marc (réputé de Cologne).	23 365	4399¾
— — — — autre.	24 211	4559
Lisbonne; marc, ou demi-livre. . .	22 931	4318
Londres; livre Troy.	37 286	7021
— — — *avoir-du-poids* . . .	45 342	8538
Madrid; marc royal de Castille. . .	22 984	4328
Malte; livre de 12 onces.	31 656	5961
Milan; marc	23 499	4425
— *libra grossa*.	76 284	14364½
Manheim; marc (réputé de Cologne).	23 377	4402
Munich; marc (*id.*).	23 384	4403½
Naples; livre de 12 onces	32 071	6039
Paris; livre de 16 onces	48 942	9216
Ratisbonne; poids de 128 couronnes.	42 952	8088
— — — — de 64 ducats. . .	22 347	4208
— — marc de 8 onces	24 599	4632
— — livre de 12 onces	56 818	10698
Stockholm; livre de 2 marcs. . . .	42 485	8000
Stuttgard; marc (réputé de Cologne).	23 386	4403¾
Turin; marc, ou demi-livre	24 589	4630¼
Varsovie; livre	40 594	7644
Venise; livre de 12 onc. *peso grosso*.	47 740	8989½
— — — — — — — *sottile*	30 143	5676
Vienne; marc du commerce	27 997	5272
— — — des monnaies	28 050	5282

Pour l'unité des masses, on peut adopter la masse même du centimètre cube d'eau distillée et considérée à son *maximum* de densité. Les rapports des masses des corps seront exprimés par les mêmes nombres que leurs poids, auxquels elles sont proportionnelles (161).

171. Pour l'unité des temps, on peut prendre la seconde, soit sexagésimale, soit décimale. La seconde sexagésimale est la 86400e partie du jour moyen astronomique ou solaire : car le jour se divise en vingt-quatre heures, l'heure en soixante minutes $= 60'$, la minute en soixante secondes $= 60''$, etc.

La seconde décimale est la 100000e partie du jour moyen astronomique : car, dans le nouveau système des mesures, on divise le jour en dix heures, l'heure en cent minutes, la minute en cent secondes, etc.

172. Pour l'unité des vitesses, on peut choisir celle qu'acquiert un corps grave en tombant librement, pendant une seconde sexagésimale, sous la latitude de Paris ; ou bien, celle d'un corps qui, à chaque seconde, parcourrait uniformément un espace égal à un mètre. Dans le premier cas, la vitesse uniforme d'un mobile quelconque sera mesurée par le rapport du nombre de mètres

qu'il parcourt en une seconde, au nombre $9^m,80879\ 5248$: dans le deuxième cas, elle sera mesurée par le nombre même des mètres que le mobile parcourt en $1''$.

173. Les forces accélératrices peuvent être rapportées, ou à la pesanteur terrestre, ou bien à une force qui, en agissant sans interruption, avec la même intensité et dans la même direction sur un point matériel pendant une seconde sexagésimale de temps, imprimerait à ce point une vitesse capable de lui faire parcourir un mètre à chaque seconde de temps. Ainsi, parce que nous mesurons les forces accélératrices par les vitesses qu'elles imprimeraient à un point matériel, en agissant sur lui uniformément, continuellement et dans la même direction, pendant une seconde; l'unité des forces accélératrices sera $9^m,80880$ dans le premier cas, et 1^m dans le second.

174. Quant aux forces motrices, et aux pressions exercées par des ressorts, des fluides, des animaux, etc., on peut les exprimer par des poids équivalens; et leur unité est alors la même que celle des poids. Cette expression des forces motrices et des pressions ne souffre aucune difficulté, d'après

ce que nous avons vu (141, 161). En effet, quelle que soit la force motrice d'un corps, ou la pression qu'il exerce, on peut toujours concevoir un autre corps grave qui commencerait à tomber, ou presserait une surface donnée, avec la même force, et dont le poids pourrait ainsi servir de mesure à cette force motrice, ou à cette pression.

175. Enfin, les forces imprimées et les forces de percussion peuvent être représentées par les quantités de mouvement que des corps pesans acquerraient en tombant librement de certaines hauteurs; car ces forces s'évaluent par des quantités de mouvement: or les corps graves peuvent acquérir, en tombant, telle quantité de mouvement qu'on voudra. Pour l'unité de ces forces, on peut prendre la quantité de mouvement qu'un gramme de matière acquerrait en tombant de $4^m,90440$, ou d'un demi-mètre (173).

176. Toutes ces différentes mesures étant une fois établies, on voit que les expressions de l'espace, du temps, des vitesses, des forces quelconques, des masses, etc., ne seront plus que des rapports mathématiques, des nombres abstraits, qui exprimeront combien de fois les unités de leurs espèces seront con-

tenues dans ces différentes grandeurs ; et c'est sous ce point de vue qu'on envisage toutes ces quantités en Mécanique.

Cette science ressortira alors toute entière du domaine des mathématiques ; et toutes ses conclusions pourront être logiquement vraies : mais il ne faut jamais perdre de vue que leur vérité objective sera toujours subordonnée à celle des principes d'où on les aura tirées, c'est-à-dire, qu'elles ne représenteront les divers phénomènes de la nature, qu'autant que ces principes auront été puisés dans la nature même, et en exprimeront les lois rigoureuses ou les lois d'expérience.

CHAPITRE IV.

Composition et décomposition des forces.

177. *Lorsqu'une force P, appliquée à un point déterminé C d'un corps A B (fig. 12), tire ou pousse ce corps suivant une direction quelconque G P, il est toujours permis de considérer cette force comme si elle était immédiatement appliquée à tout autre point D, F, G, pris en dedans ou en dehors du corps, sur sa direction, pourvu que ce point soit invariablement attaché au corps.* Fig. 12.

Car, dans ce cas, aucun de ces points ne peut se mouvoir, sans faire mouvoir tous les autres dans la même direction et avec la même vitesse que si la force leur était immédiatement appliquée. (M. *Monge, Traité élém. de Statique.*)

178. *Deux forces appliquées au même corps ne peuvent avoir une résultante, à moins que leurs directions ne concourent en un même point, et par conséquent ne soient comprises dans un même plan.* « Lorsque les directions « de deux forces ne concourent pas en un « même point, ces forces ne peuvent pas « être regardées comme destinées à mouvoir

« un point unique. Donc une force unique « ne peut pas produire le même effet. Donc « ces forces n'ont pas de résultante. » (*Id. ibid.*)

§. I.er *Des forces dont les directions concourent en un même point.*

179. Parallélogramme des forces. *Lorsque les directions de deux forces P, Q, concou-*
Fig. 14 *rent en un point A (fig. 14); si l'on prend,*
et 15. *sur ces directions, les droites AB, AC, proportionnelles à ces forces, de manière que l'on ait P : Q :: AB : AC, et qu'on achève le parallélogramme ABCD; la résultante R de ces deux forces sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale AD du parallélogramme*, c'est-à-dire, que l'on aura

$$P : Q : R :: AB : AC : AD.$$

En effet, pourvu que le point *A* soit invariablement attaché aux points d'application des forces *P*, *Q*, on pourra les regarder comme appliquées au point *A* (177). Or la proposition que nous venons d'énoncer a lieu dans ce cas (95, 122).

180. Donc, 1.°, *la résultante est* en général *plus petite que la somme des composantes;* comme, dans un triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

2.° La résultante est un *maximum*, et égale à la somme des composantes, lorsque l'angle formé par les directions des deux composantes est nul (120).

3.° La résultante est un *minimum*, et égale à la différence des deux composantes, lorsque les directions de celles-ci comprennent un angle égal à deux droits.

4.° La résultante peut être plus grande ou plus petite que chacune des deux composantes; comme, dans un parallélogramme, une diagonale peut être plus grande ou plus petite que chacun des côtés.

181. Le principe de la composition des forces peut être présenté indépendamment de la construction du parallélogramme. En effet, dans tout triangle ABD (*fig.* 14), $AB : BD : AD :: \sin. ADB : \sin. BAD : \sin. ABD$. Or $BD = AC$, $\sin. ADB = \sin. CAD$, $\sin. ABD = \sin. BAC$. Donc $AB : AC : AD :: \sin. QAR : \sin. PAR : \sin. PAQ$. Donc aussi (179) Fig. 14 et 15.

$$P : Q : R :: \sin. QAR : \sin. PAR : \sin. PAQ.$$

Donc 1.°, *les forces P, Q, R, sont chacune comme les sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

De plus, dans un triangle quelconque ABD, un côté quelconque . . . .

$AD = \sqrt{(\overline{AB}^2 \mp 2\, AB.\, BD.\, cos.\, ABD + \overline{BD}^2)}$, le signe supérieur ayant lieu dans le cas où l'angle ABD est aigu, et le signe inférieur dans le cas où cet angle est obtus. Or l'angle ABD étant supplément de l'angle PAQ, l'on a $\mp cos.\, ABD = \pm cos.\, PAQ$. D'ailleurs, si l'on fait $P = AB$, $Q = AC$, l'on a aussi $R = AD$. Donc, 2.°

$$R = \sqrt{(P^2 \pm 2\, PQ.\, cos.\, PAQ + Q^2)}.$$

182. Supposé donc que les forces P, Q,
Fig. 13. dont les directions concourent en A (*fig.* 13), soient représentées par AB, AC, et par conséquent leur résultante R par AD; *si d'un point quelconque* G (n.° 1), E (n.° 2), F (n.° 3), *de la direction de l'une quelconque de ces trois forces, on abaisse des perpendiculaires* GE et GF (n.° 1), EF et EG (n.° 2), FE et FG (n.° 3), *sur les directions des deux autres, et qu'on joigne par une droite les deux points où ces perpendiculaires rencontrent les directions des forces: chacune des trois forces* P, Q, R, *sera comme la droite comprise entre les directions des deux autres;* c'est-à-dire,

$$P : Q : R :: GF : GE : EF.$$

Car les angles AEG et AFG (n.° 1), AFE et AGE (n.° 2), AEF et AGF (n.° 3), étant droits chacun par la construction; si du diamètre AG (n.° 1), AE (n.° 2), AF (n.° 3), on

décrit un cercle, la circonférence passera nécessairement par les sommets E et F (n.° 1), F et G (n.° 2), E et G (n.° 3), de ces angles. Donc les droites GF, GE, EF, sont les cordes d'arcs doubles de ceux qui mesurent les angles QAR, PAR, PAQ; par conséquent $GF : GE : EF :: \sin. QAR : \sin. PAR : \sin. PAQ$. Donc, puisque, par le numéro précédent, $P : Q : R :: \sin. QAR : \sin. PAR : \sin. PAQ$, on doit avoir aussi $P : Q : R :: GF : GE : EF$.

183. Il suit du principe (179) qu'*on peut déterminer graphiquement*,

1.° *La résultante de tant de forces qu'on voudra, dont les directions, comprises ou non dans un même plan, concourent en un même point*; car on peut, sous la condition exprimée (177), les supposer appliquées à ce point de concours, et par conséquent en trouver la résultante (98):

2.° *La résultante de tant de forces qu'on voudra, dont les directions comprises dans un même plan ne concourent pas en un même point*; pourvu que les points d'application des forces et les points de rencontre de leurs directions soient liés entre eux d'une manière invariable. En effet, les directions de deux quelconques de ces forces, prolongées

s'il le faut, se rencontreront: on pourra donc trouver la résultante de ces deux forces (179). Prolongeant, s'il en est besoin, la direction de cette résultante particulière, jusqu'à ce qu'elle rencontre celle d'une des forces données, on trouvera une seconde résultante, équivalente aux trois premières forces. Ainsi de suite.

184. Réciproquement *une force quelconque*
Fig. 14 et 15. *R* (*fig.* 14) *peut se décomposer,*

1.° *En deux autres P, Q, dont les directions fassent entre elles un angle quelconque BAC;*

2.° Par conséquent *en un nombre quelconque de forces dirigées dans tous les sens qu'on voudra* (99, 122).

185. D'où l'on peut voir pourquoi, excepté dans le seul cas rapporté plus haut (180, 2.°), la résultante est toujours plus petite que la somme des composantes. En effet, ayant représenté les forces *P, Q*, par les
Fig. 14 et 15. droites *AB, AC* (*fig.* 14, 15), et par conséquent leur résultante *R* par *AD*, diagonale du parallélogramme *ABCD*; abaissons les perpendiculaires *BE, CF*, sur cette diagonale, et achevons les rectangles *ABEG*, *ACFH*. Au lieu de la force $P = AB$, et de $Q = AC$, nous pourrons prendre les forces

rectangulaires AE, AG, et AF, AH. Or, par l'essence du parallélogramme $ABCD$, les triangles rectangles BED, CFA, sont parfaitement égaux entre eux. Donc $BE = CF$. D'ailleurs $BE = AG$, $CF = AH$. Donc $AG = AH$. Ainsi les forces représentées par ces droites sont égales entre elles. D'ailleurs il est visible qu'elles sont directement opposées. Donc elles se détruisent mutuellement (123).

Le point A ne se meut donc qu'en vertu des seules composantes AE, AF, qui agissent suivant la même droite. Dans le cas de la *fig.* 14, elles agissent dans le même sens, et dans le cas de la *fig.* 15, elles agissent en sens opposés. Donc le point A est, dans le premier cas, mu ou sollicité au mouvement par la force $AE + AF$ (120); et, dans le second, par la force $AE - AF$. Or, à cause de l'égalité des triangles BED, CFA, l'on a $AF = DE$. Ainsi, dans les deux cas, le point A se meut, ou tend à se mouvoir, en vertu d'une force unique représentée par la diagonale AD, comme nous l'avons supposé.

Il est évident que $AE = AB.\ cos.\ BAD$, $AF = AC.\ cos.\ CAD$. Donc la résultante est à la somme des deux composantes, dans

le rapport $AB.\ cos.\ BAD \pm AC.\ cos.\ CAD$: $AB + AC$.

186. Il est aisé (101) de voir que *AE, AF*, ou *P. cos. BAD, Q. cos. CAD*, sont les valeurs des forces *AB, AC*, ou *P, Q*, estimées suivant la direction *AD*. *En général*,

1.° *Une force quelconque P, estimée suivant une direction quelconque, est égale au produit de cette force par le cosinus de l'angle compris entre la direction donnée et celle de cette force* (101, 122).

2.° *La résultante de tant de forces qu'on voudra, appliquées à un même point, et estimées suivant une droite donnée, est égale à la somme de toutes ces forces multipliées chacune par le cosinus de l'angle que leurs directions respectives font avec la droite donnée* (102, 122).

187. Les géomètres ont coutume de rapporter les forces, comme les mouvemens et la position des corps (64), à des axes perpendiculaires entre eux. La préférence qu'ils donnent à ces axes, est fondée principalement sur ce que les forces qui agissent suivant des directions perpendiculaires entre elles, ne peuvent pas s'altérer mutuellement, et qu'il est par conséquent permis de les regarder comme indépendantes les unes des

autres. En effet, tant que l'angle A (*fig.* 14, 15), formé par les directions des forces P, Q, est aigu ou obtus, l'une quelconque de ces forces, par exemple, P, pourra se décomposer en deux autres, dont l'une agisse suivant la même droite que Q (101), et qui augmentera ou diminuera l'effet produit dans la direction AQ : mais quand l'angle A est droit, cette décomposition ne saurait se faire, et aucune des deux forces ne peut augmenter ni diminuer le mouvement, ou la tendance au mouvement, qui a lieu dans la direction de l'autre. *Fig.* 14 et 15.

188. Soit donc une force quelconque, que je désigne par P, appliquée au point A (*fig.* 8); *Fig.* 8. et que sa direction, située dans le plan des axes rectangulaires AX, AY, fasse avec AX un angle égal à α : si l'on décompose cette force P en deux autres X, Y, parallèles à ces axes, on aura (103)

[1] . . . $X = P.\cos.\alpha$ . . . $Y = P.\sin.\alpha$.

[2] . . . . . . $P = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

[3] . . . . . . $P = X.\cos.\alpha + Y.\sin.\alpha$.

[4] . . . . $\text{tang.}\ \alpha = \frac{Y}{X}$.

189. Si au point A sont appliquées les forces P', P'', etc., dont les directions, situées dans le plan XAY, font avec l'axe AX les

angles α', α'', etc., et qu'on désigne par X, Y, leurs résultantes parallèles aux axes AX, AY; on aura (120, 188)

$$X = P'.\cos.\alpha' + P''.\cos.\alpha'' + \text{etc.}$$
$$Y = P'.\sin.\alpha' + P''.\sin.\alpha'' + \text{etc.}$$

En représentant par P la résultante des forces P', P'', etc., ou, ce qui revient au même, des résultantes particulières X, Y; et par α l'angle que la direction de P fait avec l'axe AX; on aura, entre P, X, Y et α, les équations du numéro précédent.

190. *Une force quelconque P, appliquée au point A (fig. 10), peut se décomposer en trois autres, X, Y, Z, parallèles à trois axes fixes perpendiculaires entre eux, et représentées par les trois arêtes contiguës à l'angle A d'un parallélipipède rectangle, dont la diagonale, contiguë au même angle A, représente la force donnée P* (104, 120); et si l'on représente par α, β, γ, les angles formés par la direction de P, et les axes AX, AY, AZ, on aura

Fig. 10.

$$X = P.\cos.\alpha \ldots Y = P.\cos.\beta \ldots Z = P.\cos.\gamma.$$

191. En général, *des forces quelconques P', P'', etc., appliquées à un même point A, se réduisent à trois X, Y, Z, parallèles à trois axes perpendiculaires entre eux;* et si l'on désigne par α', α'', etc., β', β'', etc., γ', γ'',

etc., les angles compris entre ces axes et les directions des forces, on aura (105, 120);

$$X = P'. \cos. \alpha' + P''. \cos. \alpha'' + \text{etc.}$$
$$Y = P'. \cos. \beta' + P''. \cos. \beta'' + \text{etc.}$$
$$Z = P'. \cos. \gamma' + P''. \cos. \gamma'' + \text{etc.}$$

192. Réciproquement *les forces* P', P'', etc., ou X, Y, Z, *se composent en une seule* P, *représentée par la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur les trois droites qui représentent les composantes* X, Y, Z; et α, β, γ, étant les angles formés par la direction de P et les axes coordonnés, on aura (106)

$$[1] \ldots P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$
$$[2] \ldots P = X. \cos. \alpha + Y. \cos. \beta + Z. \cos. \gamma.$$
$$[3] \ldots \cos. \alpha = \frac{X}{P}; \cos. \beta = \frac{Y}{P}; \cos. \gamma = \frac{Z}{P}.$$

193. Nous ferons observer ici,

1.° Que le deuxième membre de l'équation [2] du numéro précédent, abstraction faite des valeurs des angles α, β, γ, ne caractérise pas plutôt la valeur de la résultante absolue P des forces X, Y, Z, données, que la valeur de ces mêmes forces estimées suivant une droite quelconque, passant par A et faisant les angles α, β, γ avec leurs directions : on voit en effet (186), que l'expression de cette dernière valeur serait de la même forme que celle de

P [2]. Pour que la formule [2] exprime la valeur de la résultante absolue P, il faut que les angles α, β, γ aient les valeurs déterminées par les équations [3]; et, dans ce cas, la formule [2] retombe dans la formule [1].

2.° Que la résultante absolue $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, représentée par la diagonale $A\,a$ du parallélipipède, est *plus grande* que la résultante F des mêmes forces estimées suivant toute autre direction : car en désignant par δ l'angle que cette direction de F fait avec celle de P, on aura (186)

$$F = P.\ cos.\ \delta.$$

3.° Que la résultante F des forces estimées suivant une direction perpendiculaire à celle de leur résultante absolue P, est nulle : car, dans ce cas, $cos.\ \delta = 0$, et partant $F = P.\ cos.\ \delta = 0$.

4.° Que si le point commun d'application A se meut en vertu des seules forces X, Y, Z, ce mouvement se fera suivant la diagonale $A\,a$, c'est-à-dire, suivant la direction de la résultante P; et les vitesses du point A, parallèlement à cette diagonale et aux trois côtés du parallélipipède, seront proportionnelles à ces quatre droites, ou, ce qui revient au même, aux forces P, X, Y, Z (120, 192).

5.° Enfin, que toutes les forces qui ont les

mêmes résultantes X, Y, Z, dirigées suivant trois axes perpendiculaires entre eux, ont la même résultante, tant absolue que relative à une droite quelconque donnée et passant par l'origine de ces axes.

§. II. *Des forces parallèles.*

I.

194. *Si aux extrémités d'une droite inflexible, AB (fig. 16), sont appliquées deux forces* Fig. 16. *quelconques P, Q, qui agissent dans le même sens et suivant des directions parallèles AP, BQ;*

1.° *La résultante R de ces deux forces est égale à leur somme ; et sa direction est parallèle à celles de ces composantes, et comprise dans le même plan.*

2.° *La direction GR de cette résultante coupe toutes les droites, comme AB, comprises entre les directions des composantes, en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux forces P, Q,* de sorte que l'on a

$$P : Q : R :: BG : AG : AB.$$

En effet (182) les proportions $P : Q : R :: GF : GE : EF$ (*fig.* 13, n.° 1), ayant lieu pour toutes Fig. 13. les valeurs possibles de l'angle PAQ, doivent encore subsister lorsque cet angle s'évanouit, ou que les droites AP, AQ deviennent

parallèles. Or, dans le cas de l'évanouissement de l'angle PAQ, les angles AGE, AGF, complémens de PAR, QAR, deviennent droits, et les angles GEF, GFE sont nuls. Les deux droites GE, GF ne forment donc, dans ce cas, qu'une seule droite qui coïncide
Fig. 16. avec la troisième EF, comme dans la *fig.* 16, et qui est perpendiculaire aux directions des trois forces P, Q, R. Ainsi, d'abord, la direction de R est parallèle à celles de P, Q. D'ailleurs, des proportions $P : Q : R :: GF : GE : EF$, on tire $P+Q : R :: GF+GE : EF$. Donc aussi $R = P + Q$.

Enfin les triangles semblables AGE, BGF donnent les proportions $GF : GE : EF :: BG : AG : AB$. Donc, puisque $P : Q : R :: GF : GE : EF$, on aura aussi $P : Q : R :: BG : AG : AB$.

195. Donc, *si à un système quelconque de points matériels invariablement liés entre eux*
Fig. 17. (*fig.* 17), *on applique des forces* P, Q, R, S, etc., *qui agissent dans le même sens et suivant des droites parallèles entre elles et situées d'ailleurs dans des plans quelconques ;*

1.° *Leur résultante sera égale à la somme de toutes les composantes, et agira dans le même sens qu'elles.*

2.° *La direction de cette résultante sera*

parallèle à celles des composantes, et toute déterminée par les grandeurs et les positions de celles-ci.

Car la résultante T de P, Q, est, par le numéro précédent, égale à $P+Q$, et dirigée suivant la droite ET, parallèle à AP, BQ. Le point E, par lequel elle passe, se trouve par la proportion $T=P+Q : P :: AB : BE$, ou $P+Q : Q :: AB : AE$.

Pareillement, la résultante V de T, R, est égale à $T+R=P+Q+R$, et sa direction est parallèle à celles des composantes. Le point F de cette direction est donné par la proportion $V=P+Q+R : R :: CE : EF$.

De même, la résultante de V, S est $X=V+S=P+Q+R+S$; et le point G de sa direction, qui d'ailleurs est parallèle à celles des composantes, se détermine par la proportion $P+Q+R+S : S :: DF : FG$, etc., etc.

196. Si au point G (*fig.* 16) on applique une foree S égale et directement opposée à la résultante R des forces parallèles P, Q; S et R se feront réciproquement équilibre (123). Donc aussi les trois forces P, Q, S, appliquées à des points invariablement liés entre eux, se feront équilibre (121). Chacune d'elles, par exemple, P, peut donc être regardée Fig. 16.

comme égale et directement opposée à la résultante des deux autres Q, S (123, 2.°). Par conséquent une force $p=P$, et agissant dans la direction Ep, est la résultante de Q, S. Or (194) $R=P+Q$, et, par les suppositions, $S=R$, $p=P$. Donc $S=p+Q$, et partant

$$p = S - Q.$$

D'ailleurs (194) R ou $S : Q :: EF : EG :: AB : AG$. Donc $S-Q : Q :: AB-AG : AG$, c'est-à-dire,

$$S - Q : Q :: BG : AG.$$

Donc *si deux forces* S, Q *agissent suivant des directions parallèles entre elles, mais en sens contraires, sur un système de points matériels, invariablement liés entre eux;*

1.° *Leur résultante* p *est égale à leur différence, et agit dans le sens de la plus grande, suivant une direction parallèle à celle des composantes.*

En regardant comme positive la force S qui agit dans un sens, et comme négative la force Q qui agit en sens opposé, on pourra dire aussi, que *la résultante* p *des forces* S, Q, *est égale à leur somme.* C'est ainsi que nous en userons dans la suite.

2.° *Les distances du point* A *d'application de cette résultante, aux points* G, B *d'appli-*

cation des composantes S, Q, sont réciproquement proportionnelles à ces mêmes forces.

197. « Si les deux forces S, Q, dont les « directions sont parallèles, et qui agissent « en sens contraires, sont égales entre elles, « 1.° leur résultante p, qui est égale à $S-Q$ « (196), devient nulle. 2.° Dans la propor- « tion $S-Q : Q :: BG : AG$, le second « terme étant infiniment grand par rapport « au premier qui est nul, le quatrième terme « AG est aussi infiniment grand par rapport « au troisième. Donc le point A d'applica- « tion de la résultante p, est à une distance « infinie du point G. Donc, pour faire (avec « une seule force) équilibre aux deux forces « S, Q, il faudrait appliquer à la droite in- « flexible AB une force nulle et dont la « direction passât à une distance infinie; ce « qui n'est pas absurde, mais ce qui ne peut « s'exécuter. » (M. *Monge, Stat. p.* 17.)

198. Par le n.° 195, toutes les forces parallèles qui agissent dans le même sens sur un corps de forme invariable, se composent en une seule qui leur est parallèle et est égale à leur somme. Donc, tant de forces parallèles qu'on voudra, appliquées à un corps de forme invariable, peuvent toujours se réduire à deux résultantes particulières,

R, R', toutes deux parallèles aux composantes, et dont l'une R serait égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, et l'autre R', à la somme de celles qui agissent dans le sens opposé. Or la résultante de ces deux résultantes particulières, et par conséquent la résultante générale, est égale à leur somme, et sa direction est parallèle à celles des composantes (196).

Donc, si R, R' ne sont pas dans le cas du numéro précédent, *tant de forces parallèles qu'on voudra, appliquées à un système quelconque de points matériels liés entre eux d'une manière invariable, ont toujours une résultante dont la direction est parallèle à celles des composantes; et cette résultante est égale à la somme de ces mêmes forces*, pourvu que l'on prenne *positivement* celles qui agissent dans un sens, et *négativement* celles qui agissent dans le sens opposé.

La position de cette résultante se détermine au moyen des deux résultantes particulières R, R' (196, 2.°).

199. *Si cette résultante générale des forces parallèles est nulle, le système ne prendra aucun mouvement progressif; et réciproquement :* car, dans ce cas, on peut regarder le système comme sollicité à se mouvoir, en sens

contraires, par deux forces égales qui seraient les deux résultantes particulières dont nous venons de parler; ces deux forces ne pourront donc (118, 123) le mouvoir suivant leurs directions, ni par conséquent y produire aucun mouvement progressif (87, 1.°).

Mais le système pourra avoir un mouvement de rotation, comme il est aisé de le voir par le n.° 197.

200. En renversant le procédé que nous avons suivi dans ce paragraphe, *on pourra décomposer une force quelconque donnée, en un nombre quelconque de forces, de directions parallèles à la sienne, et situées d'ailleurs dans des plans quelconques.*

Car, ayant mené la droite FD (*fig.* 17) par un point quelconque G de la direction de la force X, on décomposera cette force en deux autres, dont l'une $V = \frac{GD}{FD} \cdot X$, et l'autre $S = \frac{GF}{FD} \cdot X$ (194). *Fig.* 17.

Chacune des forces S, V peut à son tour se décomposer en deux autres qui lui soient parallèles, etc.

Si l'on voulait décomposer la force p (*fig.* 16) en deux autres S, Q, qui lui fussent à la vérité parallèles, mais qui agissent en *Fig.* 16.

sens contraire l'une de l'autre, on trouverait (196) $Q = \frac{AG}{BG} \cdot (S - Q)$, ou

$$Q = \frac{AG}{BG} \cdot p \ldots S = \frac{AB}{BG} \cdot p.$$

Comme dans la décomposition d'une force en deux parallèles il n'y a généralement que deux conditions à observer, le parallélisme des directions des composantes et de la résultante, et l'égalité de cette dernière à la somme des premières ; il est clair que des quatre conditions qui naissent de l'intensité et de la position des composantes, il y en a généralement deux d'indéterminées, et qu'on peut résoudre le problème d'une infinité de manières. Cette remarque est analogue à celle que nous avons faite à la fin du n.° 100.

II.

201. Il est aisé de voir, par le raisonnement du n.° 195, que les grandeurs et les points d'application des forces parallèles données, P, Q,
Fig. 17. R, S, etc. (*fig.* 17), restant les mêmes, la direction de leur résultante passera toujours par le point G, quelles que soient les inclinaisons des directions parallèles des composantes, aux droites qui joignent leurs points d'application. Donc, pourvu que les forces

restent toujours parallèles, et que leurs grandeurs et leurs points d'application demeurent les mêmes, quelques changemens que subissent d'ailleurs les directions de ces forces,

1.° *Leur résultante est toujours égale à leur somme.*

2.° *La direction de cette résultante est toujours parallèle à celle des composantes, et passe toujours par un certain même point qui est unique dans le système.*

202. Le point par lequel la résultante des forces parallèles qui agissent dans le même sens, passe toujours, quelle que soit leur direction, se nomme centre *des forces parallèles.*

Si ce point était fixe, il est clair qu'il détruirait l'action de la résultante des forces, et par conséquent les actions de ces forces mêmes. Le système sollicité par ces forces ne prendrait donc aucun mouvement autour de ce point, en vertu de ces mêmes forces. Ainsi *le centre des forces parallèles, appliquées à un système quelconque, est, dans ce système, le point autour duquel ces forces se feraient équilibre ou ne produiraient aucune rotation.*

C'est pour cela qu'on lui donne aussi le nom de *centre d'équilibre.*

203. Quand les forces parallèles qui agis-

sent, ou sont supposées agir, sur tous les élémens d'un système, sont en même temps proportionnelles aux masses de ces élémens, leur centre s'appelle alors CENTRE DE GRAVITÉ OU DE MASSE : on lui donne aussi, d'après le grand *Euler*, le nom de *centre d'inertie;* mais cette dénomination ne paraît pas juste (113, 145, 2.°).

Ainsi *le centre de gravité d'un système quelconque est un point tèl que, s'il était fixe, ce système, animé dans tous ses élémens de forces parallèles, agissant dans le même sens et proportionnelles aux masses de ces élémens, resterait toujours en équilibre, quelque position qu'on lui donnât autour de ce point.* On peut aussi dire que c'est *le point par lequel passe toujours la résultante de ces forces, quelle que soit la situation du système.*

204. *Dans tout système de points matériels ou de corps, il y a un centre de gravité,* et il n'y en a qu'un.

Cette proposition est démontrée pour le cas où les élémens du système sont invariablement liés entre eux, et réellement animés de forces parallèles, agissant dans le même sens et proportionnelles à leurs masses (195). Or, si par la pensée on anéantit la liaison des parties et toutes les forces qui les sollici-

tent, il est clair que ce point, qui était auparavant le centre de gravité, ne changera pas pour cela de position, et n'en sera pas moins le centre de la masse du système. Donc, etc.

205. Ainsi la position du centre de gravité dans un corps, est indépendante de la gravité réelle dont il a emprunté son nom. Cependant, au moyen de la gravité, on peut, pour ainsi dire, voir cette position dans les corps de la nature, et la déterminer par des expériences. En effet, les poids des molécules d'un même corps peuvent être regardés comme des forces parallèles (151), proportionnelles aux masses (161), et agissant dans une direction verticale de haut en bas (148, 150); et leur résultante est le poids même du corps. Ainsi,

1.° *Le poids d'un corps peut toujours être regardé comme une force unique, égale à la somme des poids de toutes les molécules qui le composent* (195), *et appliquée au centre de gravité de ce même corps, dans une direction verticale tendante de haut en bas.*

2.° *Donc, si les parties d'un corps sont liées entre elles d'une manière invariable, on fera équilibre au poids de ce corps en appliquant à son centre de gravité une force unique,*

égale à ce poids, et dirigée verticalement de bas en haut. (123, 1.°)

3.° Réciproquement *une force unique qui contrebalance le poids d'un corps, est égale à ce poids; et sa direction est verticale de bas en haut, et passe par le centre de gravité de ce même corps.* (*Ibid.* 2.°)

206. On déduit de là une manière assez simple de trouver, par expérience, le centre de gravité d'un corps quelconque, pourvu qu'on puisse suspendre ce corps à un cordon bien flexible, ou le mettre en équilibre sur l'arête d'un prisme triangulaire, sur la pointe d'une pyramide, etc. : car si l'on suspend le même corps à un cordon successivement par deux points différens, et qu'on prolonge par la pensée, dans l'intérieur du corps, les deux directions du cordon; le point où ces deux directions se couperont, sera le centre de gravité du corps.

On peut aussi mettre le corps en équilibre sur l'arête d'un prisme triangulaire, dont l'axe soit horizontal, puis, à l'aide d'un fil d'aplomb, tracer sur la surface du corps une ligne qui détermine la position d'un plan vertical passant par l'arête du prisme : le centre de gravité du corps sera dans ce plan (205, 3.°), que l'on nomme pour cela

plan de gravité. On met ensuite le corps en équilibre dans une autre position sur la même arête du prisme, et l'on trace un second plan de gravité qui coupe le premier suivant une ligne droite qui contient nécessairement le centre de gravité du corps, et à laquelle on donne le nom de *diamètre de gravité.* Enfin, en changeant encore la position du corps, conservant toujours son équilibre sur l'arête du prisme, on obtient un troisième plan de gravité, qui coupe le diamètre ci-dessus au centre même de gravité du corps.

La statique fournit des moyens de déterminer mathématiquement la position du centre de gravité dans les différens corps.

§. III. *Des forces de directions quelconques.*

207. *Des forces quelconques, connues de grandeurs et de directions, et qui agissent sur un système de points matériels ou de corps invariablement liés entre eux, peuvent se réduire à trois autres parallèles à trois axes donnés et perpendiculaires entre eux :* et si l'on désigne les intensités de ces forces par P', P'', etc.; les angles que leurs directions font avec les axes des x, y, z, par α', α'', etc., β', β'', etc., γ', γ'', etc.; enfin les résultantes parallèles à ces mêmes axes, par X, Y, Z; on aura

$$X = P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + \text{etc.}$$
$$Y = P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' + \text{etc.}$$
$$Z = P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + \text{etc.}$$

Car, par le n.° 190, chacune des forces, par exemple P', peut se décomposer en trois autres $P' \cos.\alpha'$, $P' \cos.\beta'$, $P' \cos.\gamma'$, respectivement parallèles aux trois axes donnés. D'ailleurs (198) toutes les forces $P' \cos.\alpha'$, $P'' \cos.\alpha''$, etc., excepté dans le cas (197), ont une résultante unique, égale à leur somme, et dirigée parallèlement aux composantes et, par conséquent, à l'axe AX des x. Il en est de même des deux autres groupes de forces parallèles aux axes des y, z. Donc, etc.

208. Donc, *pour qu'un système de points matériels, libre et sollicité par des forces quelconques, n'ait aucun mouvement progressif, il suffit et il faut que la somme de ces forces, estimées chacune suivant les directions de trois axes fixes et perpendiculaires entre eux, soit nulle par rapport à chacun de ces axes*, ou que

$$P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + \text{etc.} = 0,$$
$$P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' + \text{etc.} = 0,$$
$$P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + \text{etc.} = 0;$$

ou, plus brièvement, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

1.° *Il suffit* que $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; car

tout mouvement qui naîtrait dans le système, ne serait produit que par les forces X, Y, Z (207) : or des forces nulles ne peuvent produire aucun mouvement progressif (199).

En effet, on peut faire voir que ce mouvement aurait lieu comme si toutes les forces étaient appliquées à un même point. Il serait donc (122) proportionnel à la résultante $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ (192) [i], et par conséquent nul comme elle.

2.° *Il faut* que $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; car ces forces, étant dirigées perpendiculairement entre elles, ne peuvent s'altérer mutuellement (187) : si donc quelqu'une d'elles n'était pas nulle, le système s'avancerait dans la direction de cette force, et aurait ainsi un mouvement de translation. Aussi n'est-ce que sous cette triple condition que la résultante P (192) devient nulle.

209. Le triangle ahe (*fig.* 9), étant rectangle en h, donne $ah = ae.\ \sin.\ aeh = ae.\ \sin.\ \gamma$. Fig. 9.

Cette droite ah peut être considérée comme la projection de ae sur le plan bac, parallèle à XAY; et si l'on désigne par ε l'angle hab qu'elle fait avec l'axe ab ou AX, on aura $ab = ah.\ \cos.\ \varepsilon = P.\ \sin.\ \gamma.\ \cos.\ \varepsilon$, et $ac = ah.\ \sin.\ \varepsilon = P.\ \sin.\ \gamma.\ \sin.\ \varepsilon$ (188). D'ailleurs (190)

$ab = P.\ cos.\ \alpha$, $ac = P.\ cos.\ \beta$. De ces doubles valeurs de ab, ac, on tire

$$cos.\ \alpha = sin.\ \gamma.\ cos.\ \varepsilon.\ \therefore\ cos.\ \beta = sin.\ \gamma.\ sin.\ \varepsilon.$$

210. Si au lieu de l'angle $\gamma = ead$, on emploie son complément eah, formé par la direction de la force P et par le plan XAY, et que l'on désigne ce dernier angle par δ; on aura $cos.\gamma = sin.\ \delta$, $sin.\ \gamma = cos.\delta$, $cos.\ \alpha = cos.\ \delta.\ cos.\ \varepsilon$, $cos.\beta = cos.\ \delta.\ sin.\ \varepsilon$. Substituant des valeurs analogues dans les équations du n.° 207, on trouvera

$$X = P'\ cos.\ \delta'.\ cos.\ \varepsilon' + P''\ cos.\ \delta''.\ cos.\ \varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$Y = P'\ cos.\ \delta'.\ sin.\ \varepsilon' + P''\ cos.\ \delta''.\ sin.\ \varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$Z = P'\ sin.\ \delta' + P''\ sin.\ \delta'' + \text{etc.}$$

Ces trois équations, ou les trois du n.° 207, détermineront les grandeurs des résultantes X, Y, Z: leurs directions, étant parallèles aux axes coordonnés, seront aussi connues, si l'on connaît un seul point de chacune d'elles.

Ces trois résultantes ne sont réductibles à une seule que dans le cas où leurs directions concourent en un même point. Mais,

211. *Quelles que soient les forces qui sollicitent un système quelconque de points matériels ou de corps liés entre eux d'une manière invariable, elles peuvent toujours se réduire toutes à deux, dirigées l'une dans un plan*

quelconque donné, et l'autre perpendiculairement à ce même plan. Car, après avoir prolongé la direction de la force P (*fig.* 9) jusqu'à Fig. 9. ce qu'elle rencontre en a le plan donné XAY, représentons cette force par la diagonale ae : elle pourra se décomposer en deux autres, ah, ad, dont l'une, ah, est dirigée dans le plan donné, et l'autre, ad, est perpendiculaire à ce même plan. Toutes les forces données pourront se décomposer de la même manière. Or toutes les composantes qui sont dirigées dans un même plan XAY, ont une résultante unique (183, 2.°) : il en est de même (198) de celles qui sont perpendiculaires à ce même plan. Donc, etc.

Ces deux résultantes peuvent être sujettes à l'exception du n.° 197. Dans le numéro qui suit, deux des trois résultantes peuvent être soustraites à cette exception.

212. *Toutes les forces qui animent un système*, comme ci-dessus, *peuvent*, généralement parlant, *se réduire à trois, dont les directions soient comprises dans trois plans donnés et perpendiculaires entre eux.*

Supposons d'abord qu'aucune des forces du système ne soit parallèle au plan XAY (*fig.* 9) : nous venons de voir que toutes les Fig. 9. forces pourront se réduire à deux, l'une P

dirigée dans ce plan, l'autre Q perpendiculaire à ce même plan et que nous supposerons résulter de deux forces R, R', parallèles entre elles et dirigées en sens contraires (198). Or, si par les points où les directions de R, R' coupent le plan XAY, on mène la droite EF, qui rencontre les axes AX, AY en E, F, et qu'en ces deux points on élève des perpendiculaires sur le plan XAY; on réduira (200) les forces R, R', ou la force Q, à deux autres EH, FK, dirigées, l'une dans le plan XAZ, et l'autre dans le plan YAZ. Le théorème est donc vrai dans le cas supposé.

Concevons maintenant une force P', dont la direction soit parallèle au plan XAY, et fasse un angle quelconque ω' avec le plan XAZ: on décomposera cette force en deux autres, l'une $P' \cos. \omega'$, dirigée dans le plan XAZ, et l'autre $P' \sin. \omega'$, perpendiculaire à ce même plan. Celle-ci se décomposera encore en deux autres parallèles entre elles, et dirigées l'une dans le plan XAY, et l'autre dans le plan YAZ: la première se composera avec la force Q, et la seconde avec FK. De même, les forces $P' \cos. \omega'$ et EH se réduiront à une seule. Le parallélisme des forces aux plans donnés ne fait donc pas d'exception au théorème.

CHAPITRE V.

Des momens statiques.

213. Le MOMENT *statique* d'une force, considéré *analytiquement* et par rapport à un point, *est le produit de cette force par la distance de sa direction à ce point :* considéré par rapport à une droite, *c'est le produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à cette droite, par la distance de cette projection à cette même droite.* Cette notion sera bientôt éclaircie (223, 231).

Quelquefois on appelle aussi *moment* d'une force, par rapport à un *plan*, le produit de cette force par la distance de sa direction à ce plan.

214. « Lorsque l'on considère les momens
« de plusieurs forces par rapport à un point,
« ce point se nomme CENTRE *des momens;* et
« lorsque c'est à une droite que tous les mo-
« mens sont rapportés, cette droite se nomme
« AXE *des momens.* » (M. *Monge, Statique.*)

215. Il suit des définitions (213),

1.° *Que le moment statique d'une force quelconque est nul par rapport à tout axe compris dans le même plan que la direction de cette force;* car la direction de la force et

l'axe, prolongés s'il le fallait, se rencontreraient ou pourraient être supposés se rencontrer. Donc leur plus petite distance réciproque est nulle, ou peut être supposée nulle.

Fig. 18. 2.° *Que le moment de la force P (fig. 18), par rapport à un point quelconque D, est le même que le moment de cette même force, pris relativement à un axe élevé perpendiculairement en D sur le plan passant par ce point D et par la direction AP de la force P:* car la distance de cet axe et celle du point *D*, à la direction *AP* de la force, sont mesurées par la même perpendiculaire *DB*, abaissée de *D* sur cette direction.

3.° *Que dans l'évaluation des momens de forces quelconques, dirigées dans des plans parallèles entre eux, par rapport à un même axe perpendiculaire à ces plans, il est permis de considérer les directions de ces forces comme comprises toutes dans l'un quelconque de ces plans :* car cette supposition n'altère en rien les valeurs des momens.

4.° Enfin nous avons vu (182) que, si d'un point quelconque de la direction de l'une
Fig. 13. des trois forces *P*, *Q*, *R* (*fig.* 13), on abaisse des perpendiculaires sur les directions des deux autres, on aura $P : Q : R :: GF : GE :$

EF; d'où l'on tire, pour les trois cas de la *fig.* 13,

$P.GE = Q.GF$ (n.° 1); $Q.EF = R.GE$ (n.° 2); $P.EF = R.GF$ (n.° 3).

Donc les momens statiques de deux quelconques des trois forces P, Q, R, par rapport à un point quelconque de la direction de la troisième, sont égaux entre eux.

§. I.er *Des momens statiques de forces dirigées dans un même plan ou dans les plans parallèles.*

216. Dans le plan PAQ (*fig.* 18) des forces P, Q, prenons un point quelconque D pour centre des momens, et abaissons les perpendiculaires DB, DC, DE sur les directions des deux forces P, Q, et de leur résultante R. Menons ensuite la droite AD; et ayant représenté la force P par la partie AF de sa direction, concevons cette force décomposée en deux autres, dont l'une AG agisse suivant la droite AD, et l'autre AH, dans la direction de la force Q (*fig.* 18, n.° 1), ou bien en sens directement opposé (*fig.* 18, n.° 2). Enfin faisons la composante $AG = p$, et $AH = q$. Comme le point D est sur la direction de p, les momens de l'autre com- *Fig.* 18.

posante q et de leur résultante P, par rapport au centre D, sont égaux (215, 4.°), c'est-à-dire,

$$q.\ DC = P.\ DB.$$

De plus, comme les forces Q, q agissent suivant la même droite, ou dans le même sens (n.° 1), ou en sens contraire (n.° 2), la force R peut être regardée comme la résultante des deux forces p, $Q \pm q$ (120). Ainsi le moment de la résultante R, par rapport au point D de la direction de la composante p, est égal au moment de l'autre composante $Q \pm q$, par rapport au même point D (215, 4.°), c'est-à-dire,

$$R.DE = Q.DC \pm q.\ DC.$$

Mais nous venons de trouver $q.DC = P.DB$. Donc enfin

$$R.DE = Q.DC \pm P.DB;$$

c'est-à-dire, *lorsque les directions de deux forces concourent en un même point, le moment de la résultante de ces forces, par rapport à un point quelconque pris dans le plan de ces directions, est égal à la somme ou à la différence des momens des forces composantes, par rapport au même point :* à la somme, si le centre des momens est en dehors de l'angle formé par les directions des composantes ; à

la différence, s'il est en dedans de ce même angle. (Voyez M. *Monge, Stat.*)

217. Si l'on suppose que la droite *AD* soit inflexible, et que le point *D*, ou l'axe perpendiculaire en ce point sur le plan des directions des forces, soit immobile; il est clair que les forces *P*, *Q* tendront à faire tourner leur point d'application *A*, autour du centre *D*, dans le même sens ou en sens contraires, selon que *D* est en dehors ou en dedans de l'angle *PAQ*.

D'ailleurs le théorème précédent a lieu, quel que soit cet angle *PAQ*, et par conséquent dans le cas où il s'évanouit, c'est-à-dire, dans le cas du parallélisme des forces *P*, *Q*; et ces forces parallèles tendront à faire tourner leurs points d'application, invariablement liés entre eux, autour du point *D*, dans le même sens ou en sens opposés, suivant que ce point sera en dehors ou en dedans des parallèles. Le théorème du numéro précédent peut donc s'énoncer de la manière suivante:

Lorsque deux forces sont dirigées dans un même plan, le moment de leur résultante, par rapport à un point quelconque pris dans ce plan, ou à un axe perpendiculaire en ce point sur ce même plan, est égal à la somme ou à la

différence de leurs momens, par rapport au même point ou au même axe, selon que ces forces tendent à faire tourner leurs points d'application, invariablement liés entre eux, autour du centre ou de l'axe des momens, dans le même sens ou en sens contraires. Dans ce dernier cas, la résultante tend à faire tourner le système dans le même sens que celle des deux forces dont le moment est le plus grand.

218. Cherchons maintenant les momens de tant de forces qu'on voudra, dirigées dans des plans parallèles, par rapport à un axe perpendiculaire sur ces plans. A cet effet, imaginons que les directions de toutes les forces soient projetées sur l'un quelconque de ces plans parallèles, et regardons ces projections comme les directions mêmes des forces : cette considération ne changera rien aux momens par rapport à l'axe donné. Puis, pour représenter les forces, prenons sur ces projections des parties qui leur soient proportionnelles, et composons (183, 2.°) successivement toutes celles qui tendent à faire tourner le système dans un sens : le moment statique de la résultante de deux quelconques de ces forces sera égal à la somme de leurs momens (217). Combinant de la même ma-

nière cette première résultante avec une troisième force, on obtiendra une seconde résultante, dont le moment sera égal à la somme des momens des trois premières forces, etc. On trouvera enfin la résultante R de toutes les forces qui tendent à faire tourner le système dans un sens, et dont le moment sera égal à la somme des momens de toutes les composantes.

On trouvera, de la même manière, la résultante R' de toutes les forces qui tendent à faire tourner le système dans le sens opposé, et que son moment est égal à la somme des momens de toutes ses composantes. Or le moment de la résultante des deux forces R, R', et par conséquent le moment de la résultante générale, est égal à la différence entre la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le système dans un sens, et la somme des momens de celles qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé: d'ailleurs cette différence est la somme même de tous les momens, pourvu que l'on affecte ces momens des signes qui leur conviennent.

Donc, lorsque des forces quelconques, dirigées dans des plans parallèles, agissent sur un système quelconque de points matériels invariablement liés entre eux, la somme de leurs

momens relatifs à un axe quelconque perpendiculaire aux plans de leurs directions, est égale au moment de la résultante de leurs projections sur l'un quelconque de ces plans, par rapport au même axe; pourvu que l'on prenne toujours *positivement* les momens qui tendent à faire tourner le système dans un sens, et *négativement* ceux qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé.

219. D'où il suit que *des forces quelconques, dirigées dans un même plan ou dans des plans parallèles, et appliquées à un système de points matériels liés entre eux d'une manière invariable, ne peuvent pas faire tourner le système autour d'un axe perpendiculaire aux plans de leurs directions, lorsque la somme de leurs momens relatifs à cet axe est zéro;* pourvu que ces momens soient affectés de signes convenables, comme nous venons de le dire.

Réciproquement, *la somme des momens statiques des forces est nulle par rapport à tout axe autour duquel ces forces ne peuvent pas faire tourner le système qu'elles animent.*

1.° Lorsque la somme algébrique des momens est zéro, le moment de la résultante des forces R, R', est aussi nul par rapport au même axe (218). Donc, ou bien cette résul-

tante est nulle, ou bien sa direction passe par l'axe donné. Dans le premier cas, les forces R, R' sont égales et directement opposées (179), et ne produisent par conséquent aucun mouvement (123) : dans le second cas, l'immobilité de l'axe détruirait leurs actions. Elles ne peuvent donc produire aucune rotation autour de cet axe.

2.° L'inverse se démontre par ce même raisonnement renversé.

§. II. *Des momens statiques des forces de directions quelconques, par rapport à trois axes perpendiculaires entre eux.*

220. A la force P, appliquée en a (*fig.* 10), substituons (190) les trois composantes $X = P \cos. \alpha$, $Y = P \cos. \beta$, $Z = P \cos. \gamma$, dirigées suivant les droites au, av, aw, qui sont parallèles aux axes coordonnés AX, AY, AZ; et cherchons les momens de ces trois forces par rapport à ces trois axes. Prolongeons, à cet effet, les droites ua, va, wa, jusqu'à ce qu'elles rencontrent les plans YAZ, XAZ, XAY, aux points G, F, E. Il est évident que ces droites sont respectivement perpendiculaires à ces mêmes plans. Achevons ensuite le parallélipipède Aa, et Fig. 10.

désignons par x la coordonnée $AB = CE = DF = Ga$; par y, la coordonnée $AC = BE = DG = Fa$; par z, la coordonnée $AD = BF = CG = Ea$. Enfin regardons comme *positifs* les momens qui tendent à faire tourner le point d'application a, autour de l'axe AZ, dans le sens XY; autour de l'axe AY, dans le sens XZ; autour de l'axe AX, dans le sens YZ : en un mot, prenons *positivement* les momens qui tendent à faire tourner le point a suivant l'ordre des lettres X, Y, Z, et *négativement* ceux qui tendent à le faire tourner dans les sens opposés.

Tout cela présupposé, déterminons enfin les momens des forces X, Y, Z, par rapport aux axes AX, AY, AZ. D'abord, la force X étant dirigée suivant la droite au parallèle à l'axe AX, son moment est nul par rapport à cet axe (215, 1.°). Mais, relativement à l'axe AZ, elle a un moment $X.GD = yX$, qui, tendant à faire tourner dans le sens YX, doit être pris négativement, et est $-yX$. Relativement à l'axe AY, elle produit aussi le moment $X.GC = zX$, qui tend à faire tourner dans le sens ZX, et est $-zX$. Ainsi la force X produit deux momens : l'un $-yX$, relatif à l'axe AZ, et l'autre $-zX$, relatif à l'axe AY.

Secondement la composante Y n'a point de moment par rapport à l'axe AY, auquel sa direction av est parallèle : mais relativement à l'axe AZ, son moment est $Y.FD = +xY$, qui tend à faire tourner dans le sens XY. Par rapport à l'axe AX, son moment est $Y.FB$, qu'il faut faire $-zY$, parce qu'il tend à faire tourner dans le sens ZY. La force Y produit donc aussi deux momens, l'un $+xY$, par rapport à l'axe AZ, l'autre $-zY$, relatif à l'axe AX.

Enfin la troisième composante Z, qui agit suivant la droite aw, parallèle à AZ, ne donne aucun moment relatif à cet axe : mais, par rapport à l'axe AY, son moment est $Z.EC = +xZ$; et, par rapport à l'axe AX, c'est $Z.EB = +yZ$.

Si donc nous désignons par n, m, l, les momens des trois composantes X, Y, Z, ou de leur résultante P, par rapport aux trois axes AZ, AY, AX ; et que nous ajoutions (218) ceux que nous venons de trouver, nous aurons

$$n = xY - yX ; \; m = xZ - zX ; \; l = yZ - zY.$$

En substituant pour X, Y, Z leurs valeurs (190), nous aurons pour l'expression du moment de la force P, relativement à l'axe,

$AZ \ldots n = P\,(x.\cos.\beta - y\cos.\alpha).$
$AY \ldots m = P\,(x.\cos.\gamma - z\cos.\alpha).$
$AX \ldots l = P\,(y\cos.\gamma - z\cos.\beta).$

221. *Donc si des forces quelconques P', P'', etc., agissent sur un système quelconque de points matériels, invariablement liés entre eux; que leurs directions fassent avec les trois axes fixes et rectangulaires AX, AY, AZ, les*
Fig. 10. *angles α', α'', etc., β', β'', etc., γ', γ'', etc.; et que les coordonnées de leurs points d'application, ou les distances de ces points aux plans YAZ, XAZ, XAY, soient x', x'', etc., y', y'', etc., z', z'', etc. : les momens de toutes ces forces seront par rapport à l'axe*

$$AZ \ldots N = P'\,(x'\cos.\beta' - y'\cos.\alpha') + P''\,(x''\cos.\beta'' - y''\cos.\alpha'') + \text{etc.}$$

$$AY \ldots M = P'\,(x'\cos.\gamma' - z'\cos.\alpha') + P''\,(x''\cos.\gamma'' - z''\cos.\alpha'') + \text{etc.}$$

$$AX \ldots L = P'\,(y'\cos.\gamma' - z'\cos.\beta') + P''\,(y''\cos.\gamma'' - z''\cos.\beta'') + \text{etc.}$$

Car en désignant par n', n'', etc., les momens des forces P', P'', etc., par rapport à l'axe des z; nous aurons, par le numéro précédent, $n' = P'\,(x'\cos.\beta' - y'\cos.\alpha')$, $n'' = P'\,(x''\cos.\beta'' - y''\cos.\alpha'') +$ etc. Or les directions des forces $P'\cos.\beta'$, $P''\cos.\beta''$, etc.,

$P' \cos. \alpha'$, $P'' \cos. \alpha''$, etc., qui produisent ces momens, étant parallèles les unes à l'axe des y, les autres à l'axe des x, sont évidemment toutes dans des plans perpendiculaires à l'axe des z. Donc leurs momens réunis, par rapport à cet axe, ont réellement pour valeur (218) celle que nous venons d'assigner à N.

Le raisonnement est le même pour les valeurs des momens relatifs aux axes des y et des x.

222. Si par la coordonnée aE (*fig.* 10) du point a, auquel nous supposons la force P appliquée, et par la direction aP de cette force, nous menons le plan PaE; ce plan coupera le coordonné XAY, suivant une droite EH, qui sera évidemment la projection orthogonale de la direction aP de la force P sur ce même plan XAY. Conservant donc les dénominations (209), nous aurons l'angle $EIX = \varepsilon$, $\cos. \alpha = \sin. \gamma. \cos. \varepsilon$, $\cos. \beta = \sin. \gamma. \sin. \varepsilon$. Ainsi l'expression $n = \ldots P\,(x \cos. \beta - y \cos. \alpha)$ (220) deviendra *Fig.* 10.

$$n = P \sin. \gamma\,(x. \sin. \varepsilon - y \cos. \varepsilon).$$

Faisant le rayon vecteur $AE = \varrho$, et l'angle $EAX = \omega$, nous aurons $x = \varrho. \cos. \omega$, $y = \varrho. \sin. \omega$. Donc $n = P\,\varrho. \sin. \gamma\,(\sin. \varepsilon. \cos \omega - \cos. \varepsilon. \sin. \omega)$, ou bien

$$n = P\,\varrho. \sin. \gamma. \sin. (\varepsilon - \omega).$$

L'angle EIX, extérieur au triangle AEI, est égal à $AEI + EAI$; par conséquent $AEI = EIX - EAI = \varepsilon - \omega$. Abaissant donc, de l'origine A des coordonnées, la perpendiculaire AH sur la droite EH, et faisant $AH = r$; nous aurons dans le triangle rectangle AFE, $1 : sin. AEF :: AE : AH$, ou $1 : sin. (\varepsilon - \omega) :: \varrho : r = \varrho . sin. (\varepsilon - \omega)$. Donc enfin

$$n = Pr. \, sin. \gamma.$$

En désignant par q, p les perpendiculaires abaissées de A sur les projections de la direction de la force P sur les deux autres plans coordonnés XAZ, YAZ, on trouverait de la même manière

$$m = Pq. \, sin. \beta$$
$$l = Pp. \, sin. \alpha.$$

223. Ces expressions de n, m, l ne sont que la traduction, en lettres, de la définition du moment relatif à un axe donné (213), et font voir clairement que ce moment, entendu dans le sens défini (213, 231), est la *projection* de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe donné, par sa distance à cet axe, et non, comme le définissent quelques auteurs, le produit de *la force* même par cette même distance, ou par la plus courte distance de sa direction à l'axe.

Au reste, il est aisé de parvenir directement aux expressions précédentes de n, m, l. En effet la force P (*fig.* 9), représentée par la droite ae, peut se décomposer en deux autres, ad, ah, dont la première ne produit aucun moment par rapport à l'axe AZ, auquel sa direction est parallèle (215, 1.°); la dernière ah est la projection orthogonale de $ae = P$, sur le plan XAY, et est égale à $P.\ sin.\ \gamma$ (209). Si l'on désigne donc par r la distance de cette projection à l'axe AZ, ou la droite perpendiculaire à la fois à cet axe et à la direction de P; le moment de cette force, par rapport à ce même axe, sera $n = Pr.\ sin.\ \gamma$. Les valeurs de m, l se détermineraient de la même manière. *Fig.* 9.

De ces mêmes valeurs de n, m, l, on peut remonter, par l'analyse du numéro précédent, aux expressions du n.° 220.

224. Si l'on appelle r', r'', etc.; q', q'', etc.; p', p'', etc., les droites perpendiculaires à la fois et aux directions des forces P', P'', etc., et respectivement aux axes des z, y, x; les momens de toutes ces forces seront, par rapport à l'axe des

$$z \ldots N = P'r'.\ sin.\ \gamma' + P''r''.\ sin.\ \gamma'' + \text{etc.}$$
$$y \ldots M = P'q'.\ sin.\ \beta' + P''q''.\ sin.\ \beta'' + \text{etc.}$$
$$x \ldots L = P'p'.\ sin.\ \alpha' + P''p''.\ sin.\ \alpha'' + \text{etc.}$$

Ce sont les équations qu'on obtient en mettant $r'\ sin.\ \beta'$, etc., $q'\ sin.\ \beta'$, etc.; $p'\ sin.\ \alpha'$, etc., à la place de $x'\ cos.\ \beta' - y'.\ cos.\ \alpha'$, etc., $x'.\ cos.\ \gamma' - z'.\ cos.\ \alpha'$, etc.; $y'.\ cos.\ \gamma' - z'.cos.\ \beta'$, etc., dans les équations du n.° 221.

§. III. *Composition et décomposition des momens statiques.*

225. Par l'origine A (*fig.* 19) des trois axes AX, AY, AZ, perpendiculaires entre eux, faisons passer un quatrième axe, AV, qui fasse avec eux des angles quelconques $XAV = \lambda$, $YAV = \mu$, $ZAV = \nu$. Supposons ensuite (210) que les directions des trois forces Q, R, S, soient respectivement comprises dans les trois plans coordonnés XAY, XAZ, YAZ. Enfin, désignant par L, M, N, les momens de ces trois forces relatifs aux axes des x, y, z, cherchons les momens de ces mêmes forces par rapport à l'axe AV.

1.° Soit mené le plan ZAV, qui sera nécessairement perpendiculaire au plan XAY, et le coupera suivant une certaine droite AU. Soit aussi la force Q dirigée suivant la droite BQ, et appliquée au point B, où sa direction rencontre l'axe AX. A ce point B élevons, sur cet axe, la perpendiculaire BC, qui ren-

contre AU en C; puis menons CF, parallèle à AX, et représentons la force Q par la droite BF. Cette force se trouvera ainsi décomposée en deux autres, BH, BC, dont la première ne produit aucun moment par rapport à l'axe AZ (215, 1.°) : le moment de la seconde, par rapport à cet axe, est donc égal au moment N de la résultante Q, relativement à ce même axe (216). Or, si l'on fait la force $BC = Q'$, son moment relatif à AZ, sera $Q'.AB$. Donc

$$N = Q'.AB.$$

2.° Par une raison semblable, le moment de Q, par rapport à l'axe AV, est égal à celui de Q', relativement à ce même axe. Pour déterminer celui-ci, décomposons $Q' = BC$ en deux autres, BD, BE, ou CD, CE. La première, CD, étant dirigée suivant la droite AU, son moment est nul par rapport à l'axe AV (215, 1.°). Ainsi le moment de la seconde, CE, perpendiculaire à AU, est le même que celui de la force Q', ou Q. Cherchons donc le moment de la force $CE = CB. \cos. BCE = Q'. \cos. \delta$, si l'on fait l'angle $UAX = BCE = \delta$.

A cet effet menons la perpendiculaire CG sur l'axe AV. La droite CE, étant située dans le plan XAY, et en même temps perpendicu-

laire sur l'intersection commune des deux plans *XAY* et *ZAV*, qui sont perpendiculaires entre eux, est évidemment perpendiculaire à ce dernier plan. Donc aussi les deux plans *ECG*, *ZAV* sont perpendiculaires entre eux. Par conséquent l'axe *AV*, qui est perpendiculaire à leur commune intersection *CG*, l'est aussi au plan *GCE*, dans lequel est dirigée la force $CE = Q'.\cos.\delta$. Donc le moment de cette force, relatif à l'axe *AV*, et par conséquent celui de *Q'*, ou de *Q*, par rapport à ce même axe, est $= CG.Q'.\cos.\delta$.

Mais le triangle rectangle *AGC* donne la proportion $1 : \sin.CAG :: AC : CG = AC.\sin.CAG = AC\cos.\nu$. D'ailleurs, dans le triangle *ABC*, l'on a aussi $\cos.\delta : 1 :: AB : AC = \frac{AB}{\cos.\delta}$. Donc $CG = \frac{AB.\cos.\nu}{\cos.\delta}$. Si l'on substitue cette valeur de *CG* dans l'expression $CG.Q'.\cos.\delta$ du moment de la force *Q* par rapport à l'axe *AV*, celle-ci deviendra $Q'.AB.\cos.\nu = N.\cos.\nu$ (1.°). Si l'on désigne donc ce moment par la lettre *C*, on aura

$$C = N.\cos.\nu.$$

En représentant par *B*, *A*, les momens des forces *R*, *S*, par rapport au même axe *AV*; on trouvera, par un procédé analogue,

$$B = M.\cos.\mu \;\ldots\; A = L.\cos.\lambda.$$

226. *Donc si les momens statiques de forces quelconques données, par rapport à trois axes perpendiculaires entre eux, sont L, M, N; le moment $\mathfrak{M}$ de ces mêmes forces, par rapport à un axe oblique, mené par le point où ces trois axes se coupent et faisant avec eux des angles quelconques* λ, μ, ν, sera

$$\mathfrak{M} = L.\cos.\lambda + M.\cos.\mu + N.\cos.\nu,$$

pourvu que l'on prenne *positivement* ceux des momens L, M, N, qui tendent à faire tourner dans le sens des lettres X, Y, Z (*fig.* 19), et *négativement* ceux qui tendent à faire tourner dans le sens contraire. *Fig.* 19.

En effet, il est visible par le n.° 215, 3.°, que l'existence du cas particulier (197) est indifférente à la détermination générale des momens statiques. On peut donc supposer ici que, quelles que soient les forces qui animent un système quelconque de points matériels invariablement liés entre eux, elles se réduisent toujours à trois, Q, R, S, dont les directions soient comprises dans les plans rectangulaires XAY, XAZ, YAZ (210). Les deux forces R, S, étant dirigées, l'une dans le plan XAZ, l'autre dans le plan YAZ, n'ont aucun moment relatif à l'axe AZ (215, 1.°). Donc le moment de la seule

force *Q*, relativement à l'axe *AZ*, équivaut au moment de toutes les forces du système par rapport à ce même axe, moment que nous avons déterminé (221, 224), et désigné par *N*.

On verra de la même manière, que les momens de la force *R* se réduisent à son moment relatif à l'axe *AY*; que ceux de la force *S* se réduisent à son moment par rapport à l'axe *AX*, et que les valeurs de ces deux momens sont les quantités *M*, *L*, que nous avons définies aux endroits cités.

Or des momens *N*, *M*, *L*, relatifs aux axes *AZ*, *AY*, *AX*, il résulte les momens $N.\cos.\nu$, $M.\cos.\mu$, $L.\cos.\lambda$, par rapport à l'axe *AV*. D'ailleurs, ces derniers momens sont produits par des forces dirigées dans des plans comme *ECG*, perpendiculaires à ce même axe *AV*. Donc (218) des trois momens réunis *N*, *M*, *L*, c'est-à-dire, de l'action de toutes les forces qui sollicitent le système, il résulte, par rapport à l'axe *AV*, le moment unique $\mathfrak{M}$, tel que nous l'avons défini dans la proposition.

227. En comparant l'équation du numéro précédent avec les formules [3] (106), [1] (109), [2] (192), on verra qu'il règne une harmonie extrêmement remarquable entre

les compositions des mouvemens progressifs, des mouvemens gyratoires, des forces et des momens; et l'on en conclura,

1.° *Que les momens statiques des forces, relatifs à trois axes perpendiculaires entre eux, se composent de la même manière que les mouvemens progressifs et les forces dirigés suivant ces axes, et que les rotations autour de ces mêmes axes.*

2.° *Que la composition des momens est plus générale que la composition des simples forces*, parce que celle-ci suppose que les directions rectangulaires des trois forces *X*, *Y*, *Z* (210) se coupent en un même point; au contraire, celle-là est indépendante de cette supposition.

3.° *Que toutes les forces qui donnent les mêmes momens par rapport à trois axes perpendiculaires entre eux, produisent aussi le même moment par rapport à tout axe donné et passant par l'intersection commune de ces trois autres axes.*

228. 4.° *Qu'il y a un axe, passant par l'origine des axes coordonnés, relativement auquel le moment des forces du système est un* maximum (193, 2.°); *et que le carré du plus grand moment est égal à la somme des carrés des momens relatifs à trois axes quelconques, perpendiculaires entre eux et passant par le centre*

des momens. Ainsi le plus grand moment $\mathfrak{M}$ est donné par l'équation suivante (192) :

$$[1] \ldots \mathfrak{M} = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

C'est la valeur de M (226), lorsque

$$[2] \left\{ \begin{aligned} Cos.\ \lambda &= \frac{L}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}; \\ cos.\ \mu &= \frac{M}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}; \\ cos.\ \nu &= \frac{N}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}. \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent ces trois équations déterminent la position de l'axe du *plus grand moment*.

5.° Que *le plus grand moment de forces quelconques peut se décomposer en trois autres partiels, exprimés par* $\mathfrak{M}$ *cos.* λ, $\mathfrak{M}$ *cos.* μ, $\mathfrak{M}$ *cos.* ν, *relatifs à trois axes qui se coupent à angles droits en un point donné de l'axe du plus grand moment, et qui fassent avec lui les angles* λ, μ, ν; $\mathfrak{M}$ est ici égal à $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$.

6.° Que si $\mathfrak{M}$ exprime le plus grand moment des forces données, par rapport à un centre aussi donné, et que $\mathfrak{M}'$ exprime le moment de ces mêmes forces relativement à un axe quelconque passant par ce centre, et qui fasse les angles λ', μ', ν', avec les axes

coordonnés, ou l'angle δ avec l'axe du plus grand moment; on aura (109)

[3] . . . $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}. \cos.\delta.$

[4] . . . $\cos.\delta = \cos.\lambda.\cos.\lambda' + \cos.\mu.\cos.\mu' + \cos.\nu.\cos.\nu'.$

7.° *Que le moment des forces est nul pour tous les axes situés dans le plan auquel l'axe du plus grand moment est perpendiculaire:* car pour tous ces axes, $\cos.\delta = 0$, et par conséquent $\mathfrak{M}' = 0$.[1]

229. Supposons qu'un système quelconque, animé de toutes les forces qu'on voudra, ait la liberté de tourner ou de pirouetter en tout sens autour de la commune intersection des trois axes coordonnés et de l'axe du *plus grand moment* de ces forces : on voit que ce système tournera à chaque instant

1. MM. *Euler* et *de la Place* sont les premiers auteurs de la composition des momens. M. *Euler* l'a donnée dans un mémoire qu'il présenta à l'Académie de Pétersbourg en 1780, mais qui n'a été imprimé que dans le VII.e volume des *Nova acta* de la même Académie, 1793 : c'est de ce mémoire que nous avons extrait nos n.os 225, 226, 227. M. *de la Place* est parvenu à la même découverte, dans ses belles recherches sur un plan de position invariable, et il en a déduit les corollaires du texte de ce numéro, comme on peut le voir dans le V.e et VI.e cahier du journal de l'École polytechnique. On peut aussi consulter sur ce sujet le n.° 148 de la Mécanique philosophique de M. *Prony*.

autour de l'axe du *plus grand moment*; de même qu'un système libre s'avance toujours dans la direction de la résultante complète des forces qui le sollicitent (193, 4.°). Ainsi,

1.° *L'axe du* plus grand *moment des forces est, en même temps, l'axe instantané de rotation du système qu'elles animent.*

2.° Donc *les angles élémentaires* $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$, $d\theta$, *que, dans un instant quelconque et en vertu de forces données, le système décrit autour des trois axes rectangulaires et de l'axe du plus grand moment qui passe par l'origine de ces axes, sont proportionnels aux valeurs* L, M, N, $\mathfrak{M}$, *qu'ont dans ce même instant les momens des forces, relatifs à ces axes.*

Car, à cause de l'identité de l'axe instantané de rotation et de celui du plus grand moment, l'on a (108; 228, 4.°),

$$\cos.\lambda = \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{L}{\mathfrak{M}},$$

$$\cos.\mu = \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{M}{\mathfrak{M}},$$

$$\cos.\nu = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{N}{\mathfrak{M}}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{\mathfrak{M}} = \frac{d\psi}{L} = \frac{d\omega}{M} = \frac{d\phi}{N}.$$

3.° Par la même raison, *la rotation* $d\theta'$ *du système autour d'un axe quelconque donné et passant par le point autour duquel ce système peut tourner librement, est à sa rotation* $d\theta$ *autour de l'axe instantané de rotation, comme le moment* $\mathfrak{M}'$ *des forces qui sollicitent le système, relatif à cet axe donné, est au plus grand moment* $\mathfrak{M}$ *de ces mêmes forces.* C'est une suite évidente des équations (109; 228, 6.°),

$$d\theta' = d\,\theta.\ \cos.\,\delta;\ \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}.\ \cos.\,\delta.$$

4.° Donc *les rotations d'un système donné, produites par des forces aussi données, autour d'axes quelconques qui se coupent en un point autour duquel le système peut pirouetter librement, sont proportionnelles aux momens des forces pris par rapport à ces mêmes axes.*

5.° Enfin *les rotations élémentaires produites dans un même corps, par deux systèmes de forces données, autour d'un axe quelconque passant par un point autour duquel ce corps peut tourner librement, sont entre elles comme les momens de ces systèmes de forces rapportés à cet axe.*

En effet, pour l'un des deux systèmes de forces, l'on a (3.°) $d\theta' = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}\, d\,\theta$. Désignant par τ, τ', m, m', les quantités analogues pour

l'autre système de forces, on aura pareillement $d\tau' = \frac{m'}{m} d\tau$. Donc $\frac{d\theta'}{d\tau'} = \frac{\mathfrak{M}'}{m'} \cdot \frac{m}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{d\theta}{d\tau}$. Or le centre des momens, ou de rotation, et les deux systèmes de forces étant donnés, il faut regarder comme constant le rapport $\frac{m}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{d\theta}{d\tau}$, dont les facteurs se rapportent aux axes des plus grands momens. Donc . . . . . $\frac{d\theta'}{d\tau'} = C . \frac{\mathfrak{M}'}{m'}$, C étant une constante.

230. Si l'on combine la composition des momens avec la proposition (219), il sera facile de démontrer le théorème suivant, analogue à celui du n.° 208.

Pour qu'un système de points matériels, libre et animé de forces quelconques, ne tourne pas, en vertu de ces forces, autour d'un point donné, il suffit et il faut que la somme des momens statiques de ces forces, pris par rapport à trois axes qui se coupent perpendiculairement entre eux dans le point donné, soit nulle relativement à chacun de ces axes : c'est-à-dire, il suffit et il faut que, le point donné étant l'origine des coordonnées, on ait (221)

$$P' (x' \cos.\beta' - y' \cos.\alpha') + P'' (x'' \cos.\beta'' - y'' \cos.\alpha'') + \text{etc.} = 0;$$

$$P'\ (x'\ \cos.\gamma' - z'\ \cos.\alpha') +$$
$$P''\ (x''\ \cos.\gamma'' - z''\ \cos.\alpha'') + \text{etc.} = 0;$$

$$P'\ (y'\ \cos.\gamma' - z'\ \cos.\beta') +$$
$$P''\ (y''\ \cos.\gamma'' - z''\ \cos.\beta'') + \text{etc.} = 0;$$

ou, plus brièvement, $N=0$, $M=0$, $L=0$.

1.° *Il suffit.* . . . Car ces trois équations ayant lieu à la fois, le moment $\mathfrak{M}'$ des forces, relatif à tout axe passant par le point donné, est nul, par le n.° 226. Donc le système ne peut tourner autour d'aucun axe passant par ce même point (219).

En effet, la rotation qui naîtrait dans le système autour d'un axe quelconque passant par le point donné, se composerait des rotations partielles autour des trois axes qui se coupent perpendiculairement dans ce même point (108). Or ces rotations partielles sont nulles (219), sous les trois conditions supposées. Donc toute rotation, autour du même point donné, est aussi nulle, sous les mêmes conditions.

On peut aussi démontrer que, sous ces mêmes conditions, les forces données ont une résultante unique qui passe par l'origine des coordonnées.

2.° *Il faut* que $L=0$, $M=0$, $N=0$; car la réunion de ces trois conditions est néces-

saire pour que le plus grand moment $\mathfrak{M}$ des forces soit nul (228, 4.°) [1]. Elle est donc aussi nécessaire pour anéantir le moment $\mathfrak{M}'$ de ces forces, relatif à un axe quelconque qui passerait par le point donné, sans être perpendiculaire à l'axe du plus grand moment (*ibid.* 6.°) [3]. Ce n'est donc que sous cette triple condition, que toute rotation autour du point donné devient impossible (219).

La nécessité de ces trois conditions peut se voir indépendamment de la composition des momens et de celle des rotations. En effet, le moment N, n'étant relatif qu'à l'axe des z, peut être supposé, comme dans le n.° 225, provenir uniquement de forces qui agiraient dans le plan des x, y, et ne produiraient, par conséquent, aucun mouvement autour des axes des x et y. Il en est de même des momens M, L, considérés par rapport aux axes des z et x, des z et y. Donc ces momens ne peuvent s'altérer mutuellement. Donc, pour qu'il n'en résulte aucune rotation dans le système, il faut qu'ils soient nuls chacun séparément.

On remarquera, sans doute, que cette seconde partie du théorème ne signifie pas seulement que, si l'équilibre de rotation a lieu,

on doit avoir $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ (cette dernière proposition est évidente par le n.° 219) : elle exprime que la réunion de ces trois conditions est nécessaire pour caractériser cet équilibre, et qu'une et même deux quelconques d'entre elles seraient insuffisantes pour cet objet.

231. Au n.° 213, nous n'avons défini le moment d'une force qu'en le regardant comme une fonction analytique. Maintenant il est aisé de voir que le *moment statique d'une force*, considéré mécaniquement, *est l'énergie de cette force pour faire tourner le corps, auquel elle est appliquée, autour de l'axe ou du centre des momens*. En effet, les rotations élémentaires produites par des forces données, autour d'axes quelconques passant par un même point, sont proportionnelles aux momens de ces forces relatifs à ces mêmes axes ; de même que les mouvemens progressifs, que des forces données impriment parallèlement à des droites quelconques, sont entre eux comme ces forces estimées suivant ces mêmes droites. D'où il suit que les momens statiques sont aux rotations, ce que les forces elles-mêmes sont aux mouvemens progressifs.

La justesse de la notion précédente est confirmée par les propositions (219, 230),

où l'on démontre que les forces ne peuvent produire aucun mouvement autour d'un axe ou d'un point relativement auquel leurs momens sont nuls.

Nous verrons bientôt que le mot *moment* a encore, en mécanique, une autre signification plus générale. C'est pour distinguer ces deux acceptions du même mot, qu'à l'exemple de quelques auteurs, nous avons appelé *statiques* les momens qui sont l'objet de ce chapitre, quoique ce nom paraisse mieux convenir aux momens dont nous allons nous occuper.

CHAPITRE VI.

Exposition de deux principes généraux de mécanique.

232. Pour compléter cette introduction à la mécanique, nous allons exposer deux principes généraux, que l'on peut traduire en formules générales, dont le simple développement donne toute la théorie de cette science, et toutes les équations nécessaires pour la solution des problèmes qui s'y rapportent : l'un est propre à la statique, et est connu sous le nom de *principe des vitesses virtuelles ;* l'autre convient particulièrement à la dynamique, et est ordinairement appelé *principe de d'Alembert*, du nom de son principal auteur.

§. I.er *Du principe des vitesses virtuelles.*

233. D'après la loi de continuité (116), on voit que l'action qu'une puissance exerce dans le moment B, est différente de celle qu'elle a exercée au moment A, et de celle qu'elle exercera au moment C : ainsi chaque

action d'une puissance quelconque est instantanée. C'est pour cela que *l'action d'une force sur un corps*, en tant qu'elle est censée uniforme dans divers instans consécutifs, se nomme le *MOMENT de cette force.*

Cette notion du moment revient à celle qu'en a donnée *Galilée*, qui « entend par « *moment* d'un poids ou d'une puissance ap- « pliquée à une machine, l'effort, l'action, « l'énergie, l'*impetus* de cette puissance pour « mouvoir la machine; de sorte qu'il y a « équilibre entre deux puissances, lorsque « leurs momens pour mouvoir la machine « en sens contraires sont égaux. » (*Mécan. analyt. P.* 1, *sect.* 1.)

234. La vitesse qu'une puissance, par son moment, imprime au point ou au corps sur lequel elle agit, s'appelle *virtuelle*, lorsque, à cause de l'équilibre des forces, elle n'y produit aucun mouvement, mais une simple tendance au mouvement. La *vitesse virtuelle d'une puissance est donc la vitesse avec laquelle un corps en équilibre tend à se mouvoir en vertu du moment de cette puissance*, et avec laquelle il se mouvrait réellement suivant la direction de cette puissance, dans le premier instant où l'action des autres forces serait anéantie.

235. D'où il suit que les vitesses virtuelles des forces, appliquées à un même corps, sont entre elles comme les petits espaces que les points d'application de ces forces parcourraient dans un instant, si dans cet instant le corps était abandonné à l'action de chacune des forces séparément; c'est-à-dire, qu'*elles sont proportionnelles aux variations instantanées des distances des centres respectifs des forces aux points d'application de ces mêmes forces.*

236. *Les momens des forces appliquées à un même système*, dont toutes les parties sont liées entre elles de manière qu'aucune ne puisse se mouvoir indépendamment des autres, *sont proportionnels aux produits de ces forces par leurs vitesses virtuelles.*

Ces momens sont proportionnels,

1.° *Aux forces*; car il est visible, d'après le principe (120), que si de deux forces disposées de la même manière, par rapport au système qu'elles sollicitent, l'une est double, triple, etc., de l'autre, elle déploiera aussi une énergie double, triple, etc., pour mouvoir ce système:

2.° *Aux vitesses virtuelles.* Il est aisé de voir, et toutes les machines en fournissent des exemples, que les momens des forces

dépendent de leur manière d'agir, ou de leur disposition par rapport au système qu'elles animent. Concevons, par exemple, qu'une force constante *P* agisse suivant une direction comprise dans un plan vertical qui passe par le centre de gravité du corps *A*, lequel est assujetti à demeurer sur un plan fixe et horizontal : si la direction de cette force varie depuis la droite verticale tendante de haut en bas, jusqu'à l'horizontale, le moment de cette même force pour produire un mouvement progressif dans le corps *A*, variera en même temps depuis zéro jusqu'à sa plus grande valeur. Il en est de même d'une force appliquée à un point donné d'un levier droit, et dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe autour duquel ce levier peut tourner : pendant que l'angle formé par le levier et la direction de la force croîtra depuis zéro jusqu'à l'angle droit, le moment de cette force croîtra lui-même depuis zéro jusqu'à son *maximum*.

Prenons donc deux forces égales entre elles, et cherchons le rapport de leurs momens, eu égard à leur différente manière d'agir sur le même système. Soient μ, μ' ces momens, et décomposons-les, à la manière des forces, en un nombre n, n' de momens égaux

entre eux, et dont chacun séparément imprimerait au système une vitesse élémentaire δu: le moment μ imprimerait un nombre n de vitesses δu, qui s'ajouteraient ensemble par la nature du mouvement rectiligne (91). Ainsi la vitesse du système, due au moment μ, serait $n\delta u$, que nous ferons égale à δv. De même, le moment μ' imprimerait au système, pendant le même instant, une vitesse $n'\delta u = \delta v'$. Or $\mu : \mu' :: n : n' :: n\delta u : n'\delta u$. Donc aussi $\mu : \mu' :: \delta v : \delta v'$.

Quoique ce développement suppose la commensurabilité des forces, il n'en est pas moins général pour des forces quelconques, comme il est aisé de s'en assurer par le raisonnement employé au n.° 121.

De la proportionnalité des momens aux forces et aux vitesses virtuelles des forces, on conclura, par le raisonnement qui termine le n.° 35, la proposition à démontrer.

237. Principe des vitesses virtuelles.[1] 1.° *Si*

1. Ce principe, dans le cas de l'équilibre entre deux forces seulement, paraît servir de base à l'introduction aux *Questions mécan. d'Aristote*, et à la réponse à la 3.e et 4.e de ces questions; et Galilée, à la fin de son quatrième dialogue sur le mouvement, et vers le commencement de son *Discorso intorno alle cose, che stanno in sul l'acqua*, etc., en attribue positivement la connaissance à ce grand philosophe. Mais Galilée lui-

l'on fait varier infiniment peu la position d'un système de points matériels ou de corps, sans

---

même paraît être le premier qui ait eu une idée nette de ce principe et l'ait reconnu comme une propriété générale de l'équilibre des machines; et de là vient sans doute que quelques auteurs lui en ont attribué la découverte. D'autres écrivains, comme Fr. Bayle, Kästner, Karsten, Bürja, l'ont appelé le *Principe de Descartes*, parce que ce philosophe a réduit aussi la statique à un principe unique, qui revient pour le fond à celui des vitesses virtuelles, mais considéré dans le cas de l'équilibre entre deux puissances seulement. « Car « *Jean Bernoulli* est le premier . . . , qui ait aperçu la « grande généralité du principe des vitesses virtuelles, et son « utilité pour résoudre les problèmes de statique. C'est ce « qu'on voit dans une de ses lettres à Varignon, datée de 1717, « que ce dernier a placée à la tête de la section neuvième de « sa Nouvelle mécanique » (voy. *Mécanique analyt.* P. 1, Sect. 1). Mais il paraît qu'on n'attacha pas dans le temps à la découverte de Jean Bernoulli toute l'importance qu'elle méritait; et plus de cinquante ans après, un géomètre, d'ailleurs très-estimable (*Karsten, Statik*, 2.e Aufl. §. 149), ne craignait pas d'avancer que le principe de Descartes ne pouvait s'appliquer qu'au cas particulier de deux puissances. Enfin, en 1788, parut l'immortelle *Mécanique analytique de M. de la Grange*, et avec elle se dissipèrent tous les nuages qui paraissaient environner encore la généralité et l'usage du principe des vitesses virtuelles.

Cependant ce principe n'était encore prouvé que par induction, et l'on n'en reconnaissait la vérité que parce qu'il ne présentait que des résultats conformes à ceux que fournissent les autres principes connus de la statique. M. le chevalier de *Fossombroni* en a le premier donné des démonstrations di-

altérer les conditions de la liaison de ses parties; la somme des momens des forces qui le sollicitent, c'est-à-dire, *la somme de ces forces, multipliées chacune par l'espace que son point d'application parcourt suivant sa direction, est égale à zéro, dans le cas de l'équilibre du système;* pourvu cependant qu'on regarde comme *positifs* les espaces que les points du système parcourent, dans ce changement de position, suivant les directions des forces qui les animent, et comme *négatifs*, ceux qu'ils parcourent en sens directement contraire.

---

rectes, dans son *Memoria sul principio delle velocità virtuali*, publié à Florence en 1796: autant qu'il m'en souvient, l'une de ses démonstrations repose sur la composition des forces, et l'autre, sur les mêmes principes que celle que nous donnons dans le texte. On peut voir, dans le cinquième cahier du Journal de l'École polytechnique, les efforts que firent, bientôt après, les géomètres français pour parvenir au même but. La démonstration de M. de la Grange, fondée sur le principe de l'équilibre dans les moufles, et sur ce qu'un poids, pour contre-balancer toutes les puissances au moyen de cette machine, doit être le plus bas ou le plus haut possible, est surtout remarquable par sa grande finesse. Celle que M. de la Place a donnée du même principe, dans le n.° 14 du L. I de sa *Mécanique céleste*, ne porte que sur le principe de la composition des forces, et est très-générale et très-directe. Ces démonstrations ne paraissent rien laisser à désirer du côté de la rigueur; mais la statique y gagnerait, si l'on en trouvait une qui fût indépendante des autres principes de cette science.

2.° Réciproquement, *un système de points matériels ou de corps,* liés entre eux de manière à ne pouvoir se mouvoir indépendamment les uns des autres, *est en équilibre, lorsque la somme des momens des forces qui le sollicitent, est égale à zéro.*

En effet, lorsque des forces se font équilibre, elles détruisent leurs actions réciproques; et quand cette destruction a lieu, l'équilibre doit exister (124). Or les deux parties du principe ci-dessus ne sont que l'expression de cette double vérité, comme on le voit par ce que nous venons de dire dans ce chapitre. Cependant, à cause de l'importance du principe, nous allons le démontrer rigoureusement.

1.re *Partie.* Supposons d'abord le système entièrement libre, et tous ses points liés entre eux d'une manière invariable : quel que soit le mouvement qu'il prenne dans cet état, on pourra toujours le concevoir comme composé, 1.° d'un mouvement de translation commun à tous les points; 2.° d'un mouvement de rotation autour d'un point quelconque : et il est clair (93) que l'espace qu'un point quelconque du système parcourrait, suivant une droite donnée, en vertu de ce mouvement composé, est égal à la somme al-

gébrique de ceux que ce même point parcourrait dans le même instant, suivant cette même droite, en vertu de chacune de ces deux espèces de mouvement. Commençons donc par déterminer ces deux espaces pour chaque point d'application des forces, dans la supposition que l'équilibre du système soit infiniment peu troublé.

Rappelons-nous d'abord que, quel que soit le mouvement progressif d'un point matériel, il peut toujours se décomposer en trois autres, parallèles à trois axes AX, AY, AZ (*fig.* 10), fixes et perpendiculaires entre eux Fig. 10.
(104). Soient donc $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, les petits espaces que le système, au premier instant de la rupture de l'équilibre, parcourrait suivant ces trois directions. Ces espaces, estimés suivant la direction aP de la force P', qui fait des angles α', β', γ' avec les axes coordonnés, seront $\delta\xi.\ cos.\alpha'$, $\delta\eta.\ cos.\beta'$, $\delta\zeta.\ cos.\gamma'$ (101). Ainsi le petit espace que le point a d'application de la force P' parcourt suivant la direction de cette force, en vertu du mouvement instantané de translation du système, est $= \delta\xi.\ cos.\alpha' + \delta\eta.\ cos.\beta' + \delta\zeta.\ cos.\gamma'$.

Concevons en second lieu que le système tourne infiniment peu, ou décrive un arc élémentaire $\delta\theta$, autour d'un point quelconque

arbitraire A, qu'il est permis de prendre pour le point de concours des axes coordonnés: ce mouvement équivaut aussi à trois autres, qui se feraient autour des trois axes AZ, AY, AX (108). Soient donc $\delta\phi$, $\delta\omega$, $\delta\psi$, les petits angles décrits autour de ces axes : les espaces que le point a d'application de la force P', par la rotation du système autour de l'axe AZ, décrit dans des directions parallèles aux axes AY, AX, seront (*ibid.*) $mn = x'\,\delta\phi$, $an = -y'\,\delta\phi$; estimés suivant la direction aP, ils deviendront, par le n.° (101), $x'\,\delta\phi.\cos.\beta'$, $-\,y'\,\delta\phi\cos.\alpha'$, et leur somme est $(x'\cos.\beta' - y'\cos.\alpha')\,\delta\phi$.

On trouvera de la même manière que les petits espaces parcourus par le point a, en vertu d'un petit mouvement du système autour des axes AY, AX, et estimés suivant la direction aP de la force P', sont . . . . . . $(x'\cos.\gamma' - z'\cos.\alpha')\,\delta\omega$, $(y'\cos.\gamma' - z'\cos.\beta')\,\delta\psi$. Donc l'espace que ce même point a décrit suivant la direction de la force P', en vertu d'un mouvement élémentaire de rotation autour du point arbitraire A, est égal à . . . $(x'\cos.\beta' - y'\cos.\alpha')\,\delta\phi + (x'\cos.\gamma' - z'\cos.\alpha')\,\delta\omega + (y'\cos.\gamma' - z'\cos.\beta')\,\delta\psi$.

Mais la somme de ce petit espace et de celui parcouru par le même point a en vertu

du mouvement progressif du système, est évidemment la variation que la distance de l'origine de la force P', à son point d'application, subit à raison du double mouvement de translation et de rotation. En désignant donc cette distance par s', on aura

$$\begin{aligned}\delta s' = \delta\xi.\cos.\alpha' + \delta\eta.\cos.\beta' + \delta\zeta.\cos.\gamma' \\ + (x'\cos.\beta' - y'\cos.\alpha')\,\delta\varphi \\ + (x'\cos.\gamma' - z'\cos.\alpha')\,\delta\omega \\ + (y'\cos.\gamma' - z'\cos.\beta')\,\delta\psi.\end{aligned}$$

De même, si l'on appelle s'' la distance du centre de la force P'' à son point d'application, on trouvera

$$\begin{aligned}\delta s'' = \delta\xi.\cos.\alpha'' + \delta\eta.\cos.\beta'' + \delta\zeta.\cos.\gamma'' \\ + (x''\cos.\beta'' - y''\cos.\alpha'')\,\delta\varphi \\ + (x''\cos.\gamma'' - z''\cos.\alpha'')\,\delta\omega \\ + (y''\cos.\gamma'' - z''\cos.\beta'')\,\delta\psi.\end{aligned}$$

Ainsi de suite pour les autres forces P''', P^{iv}, etc.

Maintenant, si l'on multiplie la première des équations (208) par $\delta\xi$, la seconde par $\delta\eta$, la troisième par $\delta\zeta$; puis la première des équations (231) par $\delta\varphi$, la seconde par $\delta\omega$, la troisième par $\delta\psi$, en prenant l'origine des coordonnées où l'on voudra; enfin, qu'on ajoute ensemble les premiers membres de ces six nouvelles équations : on verra évidemment que les coefficiens des forces P', P'', P''',

etc., dans l'équation résultante, sont les valeurs de $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, etc., que nous venons de déterminer. On aura donc enfin

$$[1] \ldots P' \delta s' + P'' \delta s'' + P''' \delta s''' + \text{etc.} = 0.$$

C'est la traduction analytique du principe des vitesses virtuelles.

Dans cette démonstration, nous avons supposé le système libre et composé de parties liées entre elles d'une manière invariable: mais le principe est général, quelles que soient les conditions de la liaison des parties du système, soit entre elles, soit par rapport à des obstacles étrangers. En effet, nous venons de démontrer que, si le système était libre et que ses parties fussent invariablement liées entre elles, l'action des forces actives P', P'', P''', etc., pour mouvoir le système, se réduirait à zéro, dans le cas où l'équation [1] aurait lieu. Si ces forces étaient donc anéanties, l'équilibre continuerait de subsister. Mais alors le système, quel qu'il fût, ne serait plus sollicité que par les résistances que les corps de ce système doivent éprouver de la part des obstacles étrangers qui altèrent leurs mouvemens, et par celles qui naissent de leurs liaison et action mutuelle. Donc aussi toutes ces forces passives se dé-

truisent mutuellement. Ainsi l'équation [1] exprime toute seule toutes les conditions de l'équilibre d'un système quelconque, pourvu toutefois qu'on assujettisse les variations des coordonnées, qui remplacent les droites s', s'', s''', etc., aux conditions de la liaison des parties du système.

Cette extension du principe est développée dans la *Mécanique céleste*, L. 1, n.° 14.

2.° *Partie.* Concevons que, l'équation [1] ayant lieu, les points matériels m', m'', etc., du système, animés des forces *accélératrices* P', P'', etc., prennent les vitesses v', v'', etc., suivant des directions quelconques h', h'', etc. : leurs quantités de mouvement seront (126) $m'v'$, $m''v''$, etc. Si l'on imaginait donc que ces points fussent en même temps animés des forces motrices $-m'v'$, $-m''v''$, etc.; il est clair (123) que le système resterait en équilibre. Ainsi les forces motrices $m'P'$, $m''P''$, etc., $-m'v'$, $-m''v''$, etc., se contrebalanceraient mutuellement, et l'on aurait, en vertu de la première partie du principe,

$$m'P'\delta s' + m''P''\delta s'' + \text{etc.}$$
$$-m'v'\delta h' - m''v''\delta h'' - \text{etc.} = 0.$$

Mais, par la supposition, $m'P'\delta s' + m''P''\delta s'' + \text{etc.} = 0$. Donc aussi $m'v'\delta h' + m''v''\delta h'' + \text{etc.} = 0$. Or les variations $\delta h'$, $\delta h''$, etc.,

devant être assujetties aux conditions du système, on peut (77) les supposer égales à $v' dt$, $v'' dt$, etc.; et alors on a $m' v'^2 + m'' v''^2 +$ etc. $= 0$, équation qui ne peut subsister sans que $v' = 0$, $v'' = 0$, etc. Donc, l'équation [1] ayant lieu, le système ne peut prendre aucun mouvement.

La démonstration de cette seconde partie est tirée de la *Mécan. cél.* L. 1, n.° 14.

238. Si, comme nous l'avons supposé dans la remarque du n.° 48, le système n'était sollicité que par deux forces P', P'', l'équation [1] du numéro précédent se réduirait à

$$\frac{P'}{P''} = -\frac{\delta s''}{\delta s'}.$$

Ainsi, *pour que deux forces se fassent équilibre autour d'un système* tel que nous l'avons supposé dans le numéro précédent, *il faut et il suffit qu'elles soient entre elles, réciproquement, comme les espaces élémentaires que leurs points d'application, dans le premier instant de la rupture de l'équilibre, parcourraient, l'un dans la direction de la force qui lui est appliquée, et l'autre dans un sens directement opposé à la direction de la force qui le sollicite.*

239. Pour faire usage de la formule [1] (237), qui exprime le principe des vitesses virtuelles, on a coutume de rapporter la po-

sition des points du système, et celle des centres des forces, à trois axes fixes et rectangulaires. Ainsi, en appelant x', y', z' les coordonnées du point d'application de la force P', et a', b', c', celles de l'origine de cette même force, laquelle peut être supposée fixe, on aura

$$s' = \sqrt{\{(x'-a')^2 + (y'-b')^2 + (z'-c')^2\}}$$

$$\delta s' = \frac{x'-a'}{s'}\delta x' + \frac{y'-b'}{s'}\delta y' + \frac{z'-c'}{s'}\delta z'.$$

Or il est aisé de voir que $\frac{x'-a'}{s'} = \cos.\alpha'$, $\frac{y'-b'}{s'} = \cos.\beta'$, $\frac{z'-c'}{s'} = \cos.\gamma'$. Faisant donc $P'\cos.\alpha' = X'$, $P'\cos.\beta' = Y'$, $P'.\cos.\gamma' = Z'$, on aura $P'\delta s' = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'$.

Par ces transformations, l'équation [1] (237) deviendra

$$[1]\left\{\begin{array}{l} \ldots X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' \\ + X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z'' + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Si les corps du système sont assujettis dans leurs mouvemens à des conditions particulières, il faudra commencer par exprimer ces conditions par des équations, au moyen desquelles on éliminera ensuite de la formule [1] autant de variations qu'il y a de ces équations de conditions : les variations

restantes étant alors indépendantes les unes des autres, on égalera séparément à zéro les coefficiens de chacune d'elles. Les équations qu'on obtiendra par là, jointes aux équations de conditions, seront toujours en même nombre que les coordonnées des différens corps du système, et suffiront, par conséquent, toujours pour déterminer chacune de ces coordonnées, c'est-à-dire, la position du système en équilibre.

§. II. *Du principe de* d'Alembert.

240. Toute la statique se trouvant ainsi renfermée, en quelque sorte, dans le seul principe des vitesses virtuelles, il est naturel de chercher à ramener aussi la dynamique à un seul principe général. Or voici celui qui, combiné avec le précédent, paraît le plus propre à remplir cet objet.

PRINCIPE DE D'ALEMBERT.[1] *Un système quel-*

---

1. M. *de la Grange* a remarqué que *Jacques Bernoulli* est le premier qui ait eu l'idée de ce principe, et qu'il en fit la base de sa belle solution du fameux problème du centre d'oscillation, solution qu'il ébaucha dès 1691 dans les Actes de Leipsig, et qu'il donna d'une manière complète, en 1703, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. « Mais, « ajoute ce grand géomètre, il était réservé à M. *d'Alembert* « d'envisager ce principe d'une manière générale, et de lui

conque de points matériels ou de corps, animés de forces aussi quelconques, et agissant les uns sur les autres comme on voudra, étant en mouvement; si l'on regarde le mouvement que chaque corps a dans un instant donné, comme composé de deux, dont l'un soit celui que le corps aura réellement dans l'instant suivant, il faudra que l'autre soit détruit par l'action réciproque des corps, et par celle des forces motrices dont ils sont actuellement animés. Ainsi il devra y avoir équilibre entre ces forces et les pressions ou résistances qui résultent des mouvemens qu'on peut regarder

---

« donner toute la simplicité et la fécondité dont il pouvait « être susceptible. »

Cependant ce principe ne fournit pas immédiatement les équations nécessaires pour la solution des différens problèmes de dynamique : il apprend seulement à les déduire des conditions de l'équilibre. Il restait donc encore à le combiner avec le principe des vitesses virtuelles, pour donner à la mécanique le haut degré de perfection qu'elle paraît avoir atteint de nos jours. C'est ce que M. *de la Grange* a fait de la manière la plus heureuse, dans sa *Mécanique analytique :* il a réduit par ce moyen la recherche du mouvement d'un système quelconque de corps à l'intégration d'équations différentielles. La tâche de la dynamique théorique est alors remplie : le reste ne dépend plus que de l'analyse pure, et de la connaissance des circonstances qui concourent à donner naissance aux différens phénomènes particuliers de la nature.

comme perdus, par les corps, d'un instant à l'autre.

241. La somme des momens de ces forces motrices et de ces pressions sera donc nulle (237). D'où il suit que, pour étendre au mouvement du système la formule de son équilibre (239) [1], il suffira d'y ajouter les termes dus à ces dernières forces. On y parvient aisément de la manière suivante :

Le mouvement de chaque point du système étant rapporté à trois axes fixes et rectangulaires, soient x', y', z', au bout du temps t, les coordonnées du point dont la masse est m' : les vitesses effectives de ce même point, parallèlement aux axes, seront pour ce même instant (77), $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, auxquelles on peut (92) substituer $\frac{dx'}{dt}+\frac{d^2x'}{dt}-\frac{d^2x'}{dt}$, $\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y'}{dt}-\frac{d^2y'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}+\frac{d^2z'}{dt}-\frac{d^2z'}{dt}$.

Supposons de plus que les forces accélératrices qui animent le point m' au bout du même temps t, soient réduites à trois, X', Y', Z', respectivement parallèles aux axes coordonnés (191) : les vitesses du point m', dues à ces forces accélératrices dans l'instant que

nous considérons, parallèlement aux axes, seront (139) [1].

$$X' dt, \; Y' dt, \; Z' dt.$$

Ainsi, dans l'instant qui suit le temps t, le point m' tendra à se mouvoir, parallèlement aux axes des x, y, z, avec les vitesses suivantes:

$$X' dt + \frac{dx'}{dt} + \frac{d^2x'}{dt} - \frac{d^2x'}{dt},$$

$$Y' dt + \frac{dy'}{dt} + \frac{d^2y'}{dt} - \frac{d^2y'}{dt},$$

$$Z' dt + \frac{dz'}{dt} + \frac{d^2z'}{dt} - \frac{d^2z'}{dt};$$

et il prendrait réellement une vitesse composée de celles-là, si dans cet instant il était abandonné à lui-même (106, 112). Mais cette vitesse est altérée par l'action réciproque des corps du système.

Or, puisque $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ expriment les vitesses effectives du point m' au bout du temps t; les vitesses de ce même point, après le temps $t + dt$, seront réellement ces mêmes vitesses augmentées de leurs accroissemens élémentaires. Si l'on fait donc la différentielle dt constante, elles seront représentées par $\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2x'}{dt}, \frac{dy'}{dt} + \frac{d^2y'}{dt}, \frac{dz'}{dt} + \frac{d^2z'}{dt}.$

Donc le point m' aura perdu, dans l'instant dt, les vitesses $X'\,dt - \frac{d^2x}{dt}$, $Y'dt - \frac{d^2y'}{dt}$, $Z'\,dt - \frac{d^2z'}{dt}$.

De même le point m'' aura perdu, dans ce même instant, les vitesses $X''\,dt - \frac{d^2x''}{dt}$, $Y''\,dt - \frac{d^2y''}{dt}$, $Z''\,dt - \frac{d^2z''}{dt}$.

Ainsi de suite pour les autres points du système.

Donc les forces motrices ou pressions, capables de produire ces vitesses, se seront détruites, ou se seront fait mutuellement équilibre. Or les forces accélératrices étant ces mêmes vitesses divisées par dt (139), les forces motrices ou pressions parallèles aux axes coordonnés, seront (141)

$$m'\left(X' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right),\ m'\left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right),$$

$$m'\left(Z' - \frac{d^2z'}{dt^2}\right);$$

$$m''\left(X'' - \frac{d^2x''}{dt^2}\right),\ m''\left(Y'' - \frac{d^2y''}{dt^2}\right),$$

$$m''\left(Z'' - \frac{d^2z''}{dt^2}\right);\ \text{etc.}$$

Si on les multiplie donc respectivement

par les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, etc., de leurs directions, on aura, par le principe des vitesses virtuelles,

$$o = \left\{ \begin{array}{l} m'\,\delta x'\left(X' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) + m'\,\delta y'\left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right) \\ + m'\,\delta z'\left(Z' - \frac{d^2z'}{dt^2}\right) \\ + m''\,\delta x''\left(X'' - \frac{d^2x''}{dt^2}\right) + m''\,\delta y''\left(Y'' - \frac{d^2y''}{dt^2}\right) \\ + m''\,\delta z''\left(Z'' - \frac{d^2z''}{dt^2}\right) + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

En éliminant de cette équation, au moyen des équations de conditions données par la nature du système, autant de variations qu'il y a de ces conditions, et égalant ensuite à zéro les coefficiens de chacune des variations restantes, on aura autant d'équations qu'il y a de variables qui servent de coordonnées à tous les points du système : elles suffiront donc pour déterminer le mouvement de tous ces points.

FIN.

ERRATA.

Préface, page viij, ligne 11, des; *lisez* de.

Page 90, ligne 2, $e = \frac{vt}{2}$; *lisez* $e = \frac{rt}{2}$.

Ibid. ligne 3, $v = \frac{2e}{t}$; *lisez* $r = \frac{2e}{t}$.

Page 92, ligne 13, et page 94, ligne 25, *pour instant;* lisez *pour un instant.*

123, ligne 10, substituant... et supposant; *lisez* en substituant... et en supposant.

164, ligne 22, actious; *lisez* actions réciproques.

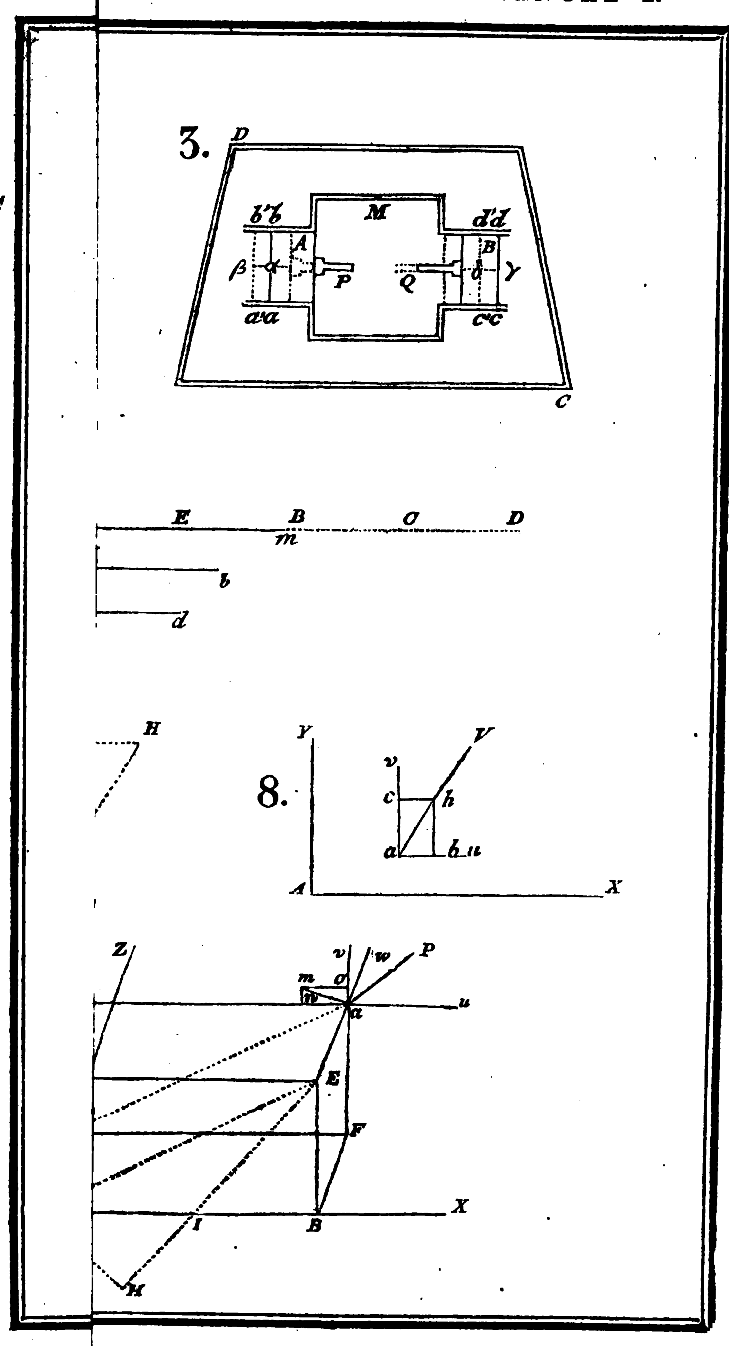
167, ligne 23, en en choquant; *lisez* en choquant.

169, ligne 5, chacun; *lisez* chacun d'eux.

230, ligne 27, *toujours; lisez* généralement parlant.

248, ligne 2, mettant $r' \sin. \beta'$; *lisez* mettant $r' \sin. \gamma'$.

254, ligne 4, M; *lisez* $\mathfrak{M}$.


3.
D
M
b'b
d'd
A
B
β
α
P
Q
δ
γ
a'a
c'c
C
E
B
C
D
m
b
d
H
8.
Y
V
v
c
h
a
b u
A
X
Z
v
w
P
m
o
n
u
a
E
F
X
I
B
M





